Journal of Lie Theory
Volume **15** (2005) 79–87

Paires symétriques orthogonales et isomorphisme de Rouvière

Charles Torossian

Communicated by J. Ludwig

Résumé. In a recent work A. Alekseev et E. Meinrenken (arXiv : math. RT/0308135) proved by using deformation of the Weyl algebra, that for quadratic symmetric paires with anti-invariant bilineaire form, Rouvière's formula is still valid. We recover this result by using orbit's method in Lie theory and our generalized Harish-Chandra homomorphism (J. Functional Anal. **117** (1993), 118–173 and 173–214, Bull. Soc. math. France **126** (1998), 295–354).

1. Introduction

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur $\mathbb{C}$, munie d'une involution σ d'algèbre de Lie. On appellera $(\mathfrak{g}, \sigma)$ une paire symétrique [7]. Si $\mathfrak{g}$ n'est pas algébrique au sens de Chevalley [6] alors on peut trouver une paire symétrique $(\overline{\mathfrak{g}}, \sigma)$ algébrique qui prolonge $(\mathfrak{g}, \sigma)$ comme paire symétrique avec $\overline{\mathfrak{g}}$ l'enveloppe algébrique de $\mathfrak{g}$ [21].

Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ la décomposition en espaces propres relativement à σ, on dira la σ-décomposition. On notera $\overline{\mathfrak{g}} = \overline{\mathfrak{k}} \oplus \overline{\mathfrak{p}}$ la σ-décomposition de $\overline{\mathfrak{g}}$. Alors $\overline{\mathfrak{k}}$ est l'enveloppe algébrique de $\mathfrak{k}$ [21]. Soit $U(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$. On définit pour $X \in \mathfrak{k}$ le caractère $\delta(X) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k}}\mathrm{ad}(X)$. On note $\mathfrak{k}^{-\delta}$ la sous-algèbre de $U(\mathfrak{g})$ définie par $\{X - \delta(X), X \in \mathfrak{k}\}$.

L'un des points fondamentaux en analyse harmonique est de comprendre la nature de l'algèbre commutative [14], [9] $(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\cdot\mathfrak{k}^{-\delta})^{\mathfrak{k}}$, qui est directement liée à l'algèbre des opérateurs différentiels invariants sur les demi-densités de l'espace symétrique G/K correspondant à ces données.

Nous avons défini dans [19], ce que devrait être l'isomorphisme d'Harish-Chandra généralisé dans ce contexte général, défini de $(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\cdot\mathfrak{k}^{-\delta})^{\mathfrak{k}}$ sur $\mathrm{S}[\mathfrak{p}]^{\mathfrak{k}}$ où $S[\mathfrak{p}]^{\mathfrak{k}}$ désigne l'espace des $\mathfrak{k}$-invariants dans l'algèbre symétrique $S[\mathfrak{p}]$. Pour l'instant notre formule est à valeurs dans le corps de fractions rationnelles et nous conjecturons (conjecture polynomiale) qu'elle est toujours à valeurs polynomiales (voir aussi [10] pour des conjectures plus générales).

Dans la plupart des cas connus (nous pensons que c'est toujours le cas) où l'on sait que ces deux algèbres sont isomorphes, notre homomorphisme réalise un

ISSN 0949–5932 / \$2.50

isomorphisme d'algèbres. En particulier on retrouve l'isomorphisme de Rouvière du cas résoluble et l'isomorphisme de Helgason-Harish-Chandra dans le cas des paires symétriques réductives.

Dans [23] nous avons étudié le cas des paires symétriques orthogonales (c'est à dire munie d'une forme bilinéaire invariante non dégénérée) dont la forme bilinéaire était σ-invariante. Nous avons montré que dans ce cas notre formule réalisait encore un isomorphisme d'algèbres de $(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\cdot\mathfrak{k}^{-\delta})^{\mathfrak{k}}$ sur $\mathrm{S}[\mathfrak{p}]^{\mathfrak{k}}$, mais qu'en général ce n'était pas la formule de Rouvière.

En utilisant les résultats de notre thèse [19, 20] on peut montrer (c.f. théorème 2.3 de cette note) que la formule de Rouvière s'étend aux paires symétriques pour lesquelles les éléments génériques de $\mathfrak{p}^*$ admettent des polarisations σ-stables vérifiant la condition de Pukanszky. On notera $P-sigma$ cette condition.

Dans un travail récent A. Alekseev et E. Meinrenken [1] étudient les implications des déformations de l'algèbre de Weyl en théorie de Lie. Ils montrent notamment (théorème F), que pour les paires symétriques orthogonales avec forme bilinéaire anti-invariante pour l'involution σ, la formule de Rouvière est encore un isomorphisme d'algèbres.

On montre dans cette note que la classe d'espaces symétriques considérée par A. Alekseev et E. Meinrenken, vérifie la condition $P-sigma$ (théorème 2.1) ce qui montre que la formule de Rouvière s'applique dans ce cas.

2. Une classe d'espaces symétriques pour l'isomorphisme de Rouvière

Rappelons dans un premier temps ce qu'est la formule de Rouvière.

Soit $X\in\mathfrak{p}$, alors $\mathrm{ad}^2(X)$ est un endomorphisme de $\mathfrak{p}$ et l'on peut considérer la fonction $J(X)$ définie par

$$J(X)=\det_{\mathfrak{p}}\Big(\frac{\sinh \mathrm{ad}X}{\mathrm{ad}X}\Big). \tag{1}$$

La série formelle $J^{1/2}$ est bien définie car $J(0)=1$, c'est un élément de $S[[\mathfrak{p}^*]]$. On peut alors considérer $\partial(J^{1/2})$ l'opérateur différentiel d'ordre infini à coefficients constants agissant comme endomorphisme sur $S[\mathfrak{p}]$.

On note β la symétrisation de $S[\mathfrak{p}]$ sur $U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\cdot\mathfrak{k}^{-\delta}$. Pour $P\in S[\mathfrak{p}]^{\mathfrak{k}}$ on note (c.f. [15]) $R(P)$ l'élément de $(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\cdot\mathfrak{k}^{-\delta})^{\mathfrak{k}}$ défini par :

$$R(P)=\beta\Big(\partial(J^{1/2})P\Big).$$

C'est une formule analogue à celle de Duflo [8]. Cette formule définit dans le cas des paires symétriques résolubles [15] ou dans le cas des paires symétriques vérifiant la condition $P-sigma$, un isomorphisme d'algèbres de $S[\mathfrak{p}]^{\mathfrak{k}}$ sur $(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\cdot\mathfrak{k}^{-\delta})^{\mathfrak{k}}$ (théorème 2.3).

2.1. Construction de polarisations σ-stables.

Le premier résultat de cette note est :

Theorem 2.1. *Soit $(\mathfrak{g},\sigma)$ une paire symétrique orthogonale sur $\mathbb{C}$, munie d'une forme bilinéaire invariante, non dégénérée et anti-invariante pour σ. On note $(\overline{\mathfrak{g}},\sigma)$ une enveloppe algébrique comme paire symétrique, alors tout élément* *générique $f \in \overline{\mathfrak{p}}^*$ admet une polarisation σ-stable vérifiant la condition de Pukanszky.*

Avant de démontrer le théorème faisons quelques rappels sur les éléments génériques de $\mathfrak{p}^*$ dans notre situation.

On note B la forme bilinéaire invariante et non dégénérée. Par définition de l'anti-invariance pour σ on a pour tout $x, y \in \mathfrak{g}$

$$B(\sigma(x), \sigma(y)) = -B(x, y).$$

On en déduit immédiatement que $\mathfrak{k}$ et $\mathfrak{p}$ sont isotropes et en dualité. En définitive $\mathfrak{p}^*$ et \$k sont isomorphes comme $\mathfrak{k}$-module.

Décomposition de Jordan

Soit $f \in \mathfrak{p}^* = \mathfrak{k}^\perp$ une forme linéaire nulle sur $\mathfrak{k}$. Notons x_f l'élément de $\mathfrak{k}$ correspondant via la forme B. Cet élément admet une décomposition de Jordan dans $\overline{\mathfrak{k}}$, notons là

$$x_f = x_s + x_u.$$

Le noyau de la forme alternée B_f (rappelons que l'on a $B_f(x, y) = f[x, y]$) associée à f est alors le centralisateur de x_f, on le note comme d'habitude $\mathfrak{g}^f$. Alors $\mathfrak{g}^f$ est σ-stable et on a $\mathfrak{g}^f = \mathfrak{k}^f \oplus \mathfrak{p}^f$. De plus $\mathfrak{k}/\mathfrak{k}^f$ et $\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^f$ sont en dualité par B_f [13]. Comme $\mathfrak{k}$ et $\mathfrak{p}$ ont même dimension on en déduit que c'est aussi le cas pour $\mathfrak{k}^f$ et $\mathfrak{p}^f$.

Éléments réguliers et très réguliers

Un élément $f \in \overline{\mathfrak{p}}^*$ est régulier au sens des paires symétriques si $\overline{\mathfrak{g}}^f$ est de dimension minimale parmi les $\overline{\mathfrak{g}}^g$ pour $g \in \overline{\mathfrak{p}}^*$. Les formes linéaires régulières dans $\overline{\mathfrak{p}}^*$ forment un ouvert de Zariski et vérifient les conditions suivantes ([19] §1.2 et §1.3) :

1. $[\overline{\mathfrak{k}}^f, \overline{\mathfrak{p}}^f] = 0$,
2. la sous-algèbre engendrée par $\overline{\mathfrak{p}}^f$ est nilpotente et on note $\mathfrak{s}_f$ son tore maximale. Il est inclus dans $\overline{\mathfrak{p}}$.

On dit que f est générique (on dit aussi très régulier) si le tore $\mathfrak{s}_f$ est de dimension maximale parmi les tores $\mathfrak{s}_g$ avec g régulier. Les tores $\mathfrak{s}_f$ pour f génériques sont tous conjugués ([19] proposition 1.4.2.1).

Polarisations

Une polarisation en f dans $\overline{\mathfrak{g}}$ est une sous-algèbre isotrope pour B_f et de dimension maximale. C'est automatiquement une sous-algèbre algébrique. On dit que f vérifie la condition de Pukanszky si on a $\mathfrak{b} = \overline{\mathfrak{g}}^f + \mathfrak{b}_u$ avec $\mathfrak{b}_u$ le radical unipotent de $\mathfrak{b}$.

Définition du σ-rang

Notons $Z(\overline{\mathfrak{g}})$ le centre de $\overline{\mathfrak{g}}$ et $Z(\overline{\mathfrak{g}})_s$ sa partie semi-simple. Le σ-rang de $\overline{\mathfrak{g}}$ est défini comme étant la dimension des tores $\mathfrak{s}_f/\mathfrak{s}_f \cap Z(\overline{\mathfrak{g}})_s$ pour f générique dans $\overline{\mathfrak{p}}^*$.

Démonstration. La démonstration du théorème 2.1 se fait par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$.

La forme B est invariante par $\mathfrak{g}$ et donc par $\overline{\mathfrak{g}}$. Soit f un élément générique de $\overline{\mathfrak{p}}^*$. On note encore f sa restriction à $\mathfrak{g}$. On écrit $x_f = x_s + x_u$. On voit facilement que $\overline{\mathfrak{g}}^f$ est encore le centralisateur de x_f dans $\overline{\mathfrak{g}}$. En effet on a pour tout $x \in \overline{\mathfrak{g}}$,

$$[x, \overline{\mathfrak{g}}] = [x, \mathfrak{g}].$$

Alors pour $x \in \overline{\mathfrak{g}}^f$ on a $f([x, \overline{\mathfrak{g}}]) = f([x, \mathfrak{g}]) = 0$; par suite on a $B(x_f, [x, \mathfrak{g}]) = B([x_f, x], \mathfrak{g}) = 0$, ce qui permet de conclure.

Considérons la décomposition de $\mathfrak{g}$ sous l'action adjointe de x_s (rappelons que $\mathfrak{g}$ est un idéal de $\overline{\mathfrak{g}}$). On a

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_o \oplus \sum_{\lambda} \mathfrak{g}_\lambda \tag{2}$$

avec $\mathfrak{g}_\lambda$ espace propre pour la valeur propre λ. Comme on a $\sigma(x_s) = x_s$ l'espace propre $\mathfrak{g}_\lambda$ est σ-stable. Comme on a $\overline{\mathfrak{g}}_\lambda = \mathfrak{g}_\lambda$ on a aussi

$$\overline{\mathfrak{g}} = \overline{\mathfrak{g}}_o \oplus \sum_{\lambda} \mathfrak{g}_\lambda. \tag{3}$$

On a clairement $\overline{\mathfrak{g}}_o = \overline{\mathfrak{g}_o}$ enveloppe algébrique de $\mathfrak{g}_o$.

La forme B étant invariante par $\overline{\mathfrak{g}}$, on a $\mathfrak{g}_\lambda \perp_B \mathfrak{g}_\mu$ si $\lambda + \mu \neq 0$. On en déduit que si λ est racine alors $-\lambda$ l'est aussi et que $\mathfrak{g}_\lambda$ et $\mathfrak{g}_{-\lambda}$ sont en dualité. Comme dans [19] (comme dans le cas réductif) on peut séparer les racines en deux sous-ensembles Δ et $-\Delta$ stables par addition. Alors $\mathfrak{n} = \sum_{\lambda \in \Delta} \mathfrak{g}_\lambda$ est une sous-algèbre σ-stable.

La sous-algèbre $\mathfrak{g}_o$ est σ-stable, contient $\mathfrak{g}^f$ et $B|\mathfrak{g}_o \times \mathfrak{g}_o$ est non dégénérée. Par conséquent $(\mathfrak{g}_o, \sigma)$ est un paire symétrique qui est dans la même classe que $\mathfrak{g}$. Pour construire une polarisation σ-stable de f dans $\overline{\mathfrak{g}}$ il suffit de construire une polarisation σ-stable de f dans $\overline{\mathfrak{g}}_o$ vérifiant la condition de Pukanszky et de lui ajouter $\mathfrak{n}$.

La décomposition (3) est orthogonale pour B_f et B_f est non dégénérée sur $[x_s, \overline{\mathfrak{g}}]$. On en déduit facilement que $f|_{\overline{\mathfrak{g}}_o}$ est encore générique dans $\overline{\mathfrak{p}}_o^*$ ([19] §1.4). On pourra donc appliquer l'hypothèse de récurrence si la dimension de $\overline{\mathfrak{g}}_o$ est inférieure à la dimension de $\overline{\mathfrak{g}}$, c'est à dire si $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x_s)$ est non nul.

Supposons que pour un f générique on ait $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x_s) = 0$. Je dis alors que $\overline{\mathfrak{g}}$ est de σ-rang nul et d'après le théorème 1.5.3.1 de [19] cet élément admet une polarisation σ-stable vérifiant la condition de Pukanszky.

En effet si le tore $\mathfrak{s}_f$ n'est pas central dans $\overline{\mathfrak{g}}$ on a une décomposition en espaces radiciels sous l'action adjointe de $\mathfrak{s}_f$

$$\overline{\mathfrak{g}} = \overline{\mathfrak{g}}_{(o)} \oplus \sum_{\mu} \mathfrak{g}_{(\mu)}.$$

Comme f est régulier (c.f. rappels) on a $\overline{\mathfrak{g}}^f \subset \overline{\mathfrak{g}}_{(o)}$, Alors $\mathfrak{g}_{(\mu)}$ est stable par $\overline{\mathfrak{g}}_{(o)}$, en particulier sous l'action adjointe $\mathrm{ad}(x_f)$ car $x_f \in \overline{\mathfrak{g}}^f \subset \overline{\mathfrak{g}}_o$. Or $\mathrm{ad}(x_f)$ est unipotent (car $\mathrm{ad}(x_s) = 0$) donc il existe $y \in \mathfrak{g}_{(\mu)}$ non nul vérifiant $[x_f, y] = 0$, c'est à dire $y \in \mathfrak{g}^f \subset \overline{\mathfrak{g}}_{(o)}$ ce qui est absurde, car $\mathfrak{g}_{(o)} \cap \mathfrak{g}_{(\mu)}$ est nul. ■

Remark 2.2. Si $(\overline{G},\sigma)$ est un groupe algébrique connexe correspondant à la paire symétrique $(\overline{\mathfrak{g}},\sigma)$, notre démonstration montre facilement que l'on peut choisir une polarisation stable par $\overline{K}(f)$ avec $\overline{K}$ les points fixes de σ dans $\overline{G}$.

2.2. Une extension des résultats de [19, 20].

Nous considérons que le deuxième résultat de cette note était acquis et contenu dans [19, 20]. Par souci de clarté nous présentons ici ce résultat sous une forme plus autonome :

Theorem 2.3. *Soit $(\mathfrak{g},\sigma)$ une paire symétrique algébrique sur $\mathbb{C}$ vérifiant la condition $P-sigma$, alors la formule de Rouvière définit un isomorphisme d'algèbres de $S[\mathfrak{p}]^{\mathfrak{k}}$ sur $(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\cdot\mathfrak{k}^{-\delta})^{\mathfrak{k}}$.*

Le principe de l'extension des scalaires assure que ce résultat est encore vrai sur le corps des réels. Comme $\mathfrak{g}$ est un idéal dans $\overline{\mathfrak{g}}$, on déduit de ces deux théorèmes précédents une autre preuve du théorème F de [1].

Corollary 2.4. [1] *Soit $(\mathfrak{g},\sigma)$ une paire symétrique orthogonale avec forme bilinéaire anti-invariante par σ, alors la formule de Rouvière est un isomorphisme d'algèbres de $S[\mathfrak{p}]^{\mathfrak{k}}$ sur $(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\cdot\mathfrak{k}^{-\delta})^{\mathfrak{k}}$.*

Démonstration. Le théorème 2.3 est une conséquence non triviale de la méthode des orbites et c'est l'essence de la preuve de Duflo [8] que l'on a appliquée aux espaces symétriques dans [19, 20] (voir aussi [5] et [22]).

On ébauche les grandes lignes de la démonstration qui consiste en une redite des textes [19, 20].

Introduisons quelques notations indispensables dont on trouvera une description plus détaillée dans [19, 20].

On se donne (G,σ) un groupe linéaire algébrique sur $\mathbb{C}$ muni d'une involution σ, tel que $Lie(G)=\mathfrak{g}$ et telle que la différentielle de σ à l'origine coïncide avec l'involution de l'algèbre de Lie (que l'on note par la même lettre). On pose $K=G^{\sigma}$ le sous-groupe des points fixes. On considère les objets réels sous-jacents. Le passage réel/complexe ne pose pas de problème. En particulier on peut identifier $(\mathfrak{g}^*)_{\mathbb{R}}$ avec $(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})^*$ via $f\mapsto\Re(f)$, l'application inverse étant donné par $g\mapsto f$, avec $f(X)=g(X)-ig(iX)$.

On note Δ_G le caractère $|\det_{\mathfrak{g}}Ad(x)|^{-1}$ et $\Delta_{G,K}(x)=\Delta_K(x)/\Delta_G(x)=|\det_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k}}Ad(x)|$ le caractère de K.

Pour χ un caractère de K on note $G\times_K\mathbb{C}_\chi$ le fibré en droites dont les sections vérifient $\phi(gk)=\chi(k)^{-1}\phi(g)$. On définit (voir par exemple [19] §2.1) via les mesures de Haar une densité à valeur dans $G\times_K\mathbb{C}_{\Delta_{G,K}}$ notée $d_{G/K}$. On a alors

$$d_{G,K}(gk)=\Delta_{G,K}(k)^{-1}d_{G,K}(g).$$

Comme G est un sous-groupe d'un groupe linéaire on introduit l'ouvert invariant et σ-stable, des éléments de $X\in\mathfrak{g}$ vérifiant $|Im(\lambda)|<\pi/4$ pour toutes valeurs propres λ de X. On le note $\mathcal{V}$.

On considère l'application exponentielle notée Exp de $\mathfrak{p}$ sur G/K. C'est un difféomorphisme de $\mathcal{W}:=\mathcal{V}\cap\mathfrak{p}$ sur son image dans G/K. De plus $\mathcal{W}$ est invariant par l'action adjointe de K.

La mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{p}^*$ est semi-invariante par K de poids $\Delta_{G,K}$. Par désintégratrion on obtient sur presque toutes les orbites génériques ω une mesure de poids $\Delta_{G,K}$ que l'on note $d\lambda_\omega$. On peut sans perte de généralité supposer que ces mesures sont tempérées, ce qui permet de considérer leurs transformées de Fourier que l'on multiplie par $J^{-1/2}$. Ce sont des fonctions généralisées sur $\mathcal{W}$ semi-invariantes de poids $\Delta_{G,K}^{-1}$.

Le point clef est de montrer que ces fonctions généralisées sont propres sous l'action naturelle de $(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\cdot\mathfrak{k}^{-\delta})^{\mathfrak{k}}$ qui est naturellement inclus dans algèbre des opérateurs différentiels invariants sur les demi-densités de G/K.

Comme Exp est un difféomorphisme de $\mathcal{W}$ sur son image, on peut considérer l'image réciproque du fibré en droites $\mathrm{Exp}_{\mathcal{W}}^*(G\times_K\mathbb{C}_{\Delta_{G,K}^{1/2}})=\mathcal{W}\times\mathbb{C}$.

Soit $\varphi(X)dX$ une densité sur $\mathcal{W}$ à support compact et considérons la densité du fibré $G\times_K\mathbb{C}_{\Delta_{G,K}^{1/2}}$ à support dans $\mathrm{Exp}(\mathcal{W})$ définie par

$$\mathrm{Exp}_*(\varphi(X)dX)=\Phi(g)d_{G,K},$$

alors Φ est une section du fibré $G\times_K\mathbb{C}_{\Delta_{G,K}^{-1/2}}$.

Par hypothèse les orbites génériques admettent des polarisations σ-stables qui vérifient la condition de Pukanszky. Pour un tel $f\in\mathfrak{p}^*$ on note $\mathfrak{b}$ une polarisation σ-stable. Notons $B\subset G$ le groupe algébrique connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{b}$. Notons χ_f la fonction définie sur $B\cap\exp(\mathcal{V})=\exp(\mathfrak{b}\cap\mathcal{V})$ ([19], lemme 2.3.3.1), par $\chi_f(exp(X))=e^{i\Re(f)(X)}$. Remarquons que l'on n'a pas besoin de définir un caractère du groupe B ce qui a l'avantage de ne pas supposer que $i\Re(f)|_{\mathfrak{b}}$ soit intégrable.

On considère la section généralisée du fibré $G\times_K\mathbb{C}_{\Delta_{G,K}^{-1/2}}$ définie sur $\mathrm{Exp}(\mathcal{W})$ par

$$\Phi d_{G,K}\longmapsto j_*(\Phi d_{G,K})=\int_{B/B\cap K}\Phi(b)\chi_f(b)\Delta_{G,B}^{-1/2}(b)d_{B,B\cap K}(b). \tag{4}$$

D'après [19] §2.8 tous les caractères sont bien ajustés. D'après [19], théorème 3.3.2.1, c'est une section généralisée propre sous l'action des opérateurs différentiels invariants D_u pour $u\in(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\cdot\mathfrak{k}^{-\delta})^{\mathfrak{k}}$. Ceci fournit donc un caractère de cette algèbre noté $u\longrightarrow\lambda_{f,\mathfrak{b}}(u)$.

Pour $k\in K$ la formule

$$\Phi d_{G,K}\longmapsto j_*(\Phi d_{G,K})(k)=\int_{B/B\cap K}\Phi(kb)\chi_f(b)\Delta_{G,B}^{-1/2}(b)d_{B,B\cap K}(b)$$

définit encore une section généralisée propre sous l'action des opérateurs D_u de même caractère $\lambda_{f,\mathfrak{b}}$ car D_u est invariant.
La condition de Pukanszky assure que l'orbite $K\cdot f$ est fibrée et que l'on a

$$K\cdot\Re(f)=K\times_{K\cap B}(\Re(f)+(\mathfrak{p}\cap\mathfrak{b})^{\perp}).$$

Les paragraphes 2.6 et 2.7 de [19] montrent alors que

$$\int_{K/K\cap B}j_*(\Phi d_{G,K})(k)\Delta_{G,K}^{-1/2}(k)d_{K,K\cap B}(k) \tag{5}$$

est proportionnelle à

$$\int_{K\cdot\Re(f)} d\lambda_\omega(\xi)\left(\int_{\mathfrak{p}} \varphi(X)e^{i\xi(X)}J^{-1/2}(X)\,dX\right). \tag{6}$$

On conclut d'une part que la transformée de Fourier de l'orbite $\omega = K\cdot\Re(f)$ multipliée par $J^{-1/2}$ est une fonction généralisée sur $\mathcal{W}$ propre sous l'action des opérateurs D_u écrits en coordonnées exponentielles. Comme on peut reconstituer la masse de Dirac en $0\in\mathfrak{p}$ par de telles distributions, on en déduit comme dans [8, 5, 20] que pour presque tout $f\in\mathfrak{p}^*$ le caractère $\lambda_{f,\mathfrak{b}}$ est donné par la formule de Rouvière. Ceci montre que la formule de Rouvière est un homomorphisme d'algèbres. ∎

2.3. Comparaison avec l'homomorphisme d'Harish-Chandra généralisé. Expliquons maintenant pourquoi dans l'hypothèse d'une paire symétrique orthogonale avec forme bilinéaire anti-invariante par σ, notre homomorphisme d'Harish-Chandra généralisé coïnciderait avec la formule de Rouvière.

La démonstration de [23] concernant le cas des paires symétriques résolubles est basée sur l'étude des parties radiales des opérateurs différentiels invariantes "à l'infini". C'est ce que l'on fait en général dans le cas des espaces symétriques réductifs. La comparaison des facteurs dominants fournit dans le cas résoluble le résultat cherché.

Cette démonstration fonctionne sans problème pour le cas étudié dans cette note sous la condition que l'on sache écrire l'action des opérateurs différentiels invariants en coordonnées exponentielles sur les distributions K-semi-invariantes. A savoir après modification par $J^{1/2}$, ces opérateurs agissent comme des opérateurs à coefficients constants, ce qui expliquerait a posteriori que les transformées de Fourier des K-orbites dans $\mathfrak{p}^*$ soient des fonctions propres comme nous venons de le voir.

C'est le problème de l'extension de l'isomorphisme de Rouvière (ou celui de Duflo dans le cas des groupes) au cas des distributions à support quelconque, qui motive les conjectures de Kashiwara-Vergne-Rouvière sur les formules de Baker-Campbell-Hausdorff [12, 16, 17, 18, 2, 3, 24, 25]. En effet l'isomorphisme de Rouvière signifie que l'application exponentielle réalise un isomorphisme pour la convolution entre les distributions K-invariantes à support 0 dans $\mathfrak{p}$ et les distributions K-invariantes à support dans $e\in G/K$.

On peut penser que pour la classe d'espaces symétriques considérée, cette extension est encore vraie (ou une version suffisante comme dans [25]) ce qui assurerait que l'isomorphisme de Rouvière et notre homomorphisme coïncident.

References

[1] Alekseev, A., and E. Meinrenken, *Lie theory and the Chern-Weil homomorphism*, arXiv: math. RT/0308135.

[2] Andler, M., A. Dvorsky, and S. Sahi, *Kontsevich quantization and invariant distributions on Lie groups*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **35** (2002), 371–390.

[3] Andler, M., S. Sahi, S., and C. Torossian, *Convolution of invariant distributions on Lie groups*, arXiv: math. QA/0104100.

[4] Arnal, D., N. Ben Amar, and M. Masmoudi, *Cohomology of good graphs and Kontsevich linear star products*, Lett. Math. Phys. **48** (1999), 291–306.

[5] Benoist, Y., *Analyse harmonique sur les espaces symétriques*, J. Functional Analysis **59** (1984), 211–253.

[6] Chevalley, C., "Théorie des groupes de Lie, 2," Hermann, Paris, 1951.

[7] Dixmier, J., "Algèbres enveloppantes," Gauthier-Villars, Paris, 1974.

[8] Duflo, M, *Opérateurs différentiels bi-invariants sur un groupe de Lie*, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. **10** (1977), 107–144.

[9] —, *Opérateurs différentiels invariants sur un espace symétrique*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série A **289** (1979), 135–137.

[10] —, *Open problems in representation theory of Lie groups*, Conference on Analysis on homogeneous spaces, T. Oshima editor, Kataka, Japon, August 25-30, 1986.

[11] Ginzburg, V. A., *Method of orbits in the representation theory of complex Lie groups*, Funct. Anal. Appl. **15** (1981), 18–28.

[12] Kashiwara, M., and M. Vergne, *The Campbell-Hausdorff formula and invariant hyperfunctions*, Inventiones Math. **47** (1978), 249–272.

[13] Kostant, B., and S. Rallis, *Orbits and representations associated with symmetric spaces*, Amer. J. Math. **93** (1971), 753–809.

[14] Lichnerowicz, A., *Opérateurs différentiels invariants sur un espace symétrique*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série A **257** (1963), 3548–3550.

[15] Rouvière, F., *Espaces symétriques et méthodes de de Kashiwara-Vergne*, Ann. Sc. École Norm. Sup. **19** (1986), 553–581.

[16] —, *Invariant analysis and contractions of symmetric spaces I*, Compositio Math. **73** (1990), 241–270.

[17] —, *Invariant analysis and contractions of symmetric spaces II*, Compositio Math. **880** (1991), 111–136.

[18] —, *Fibrés en droite sur un espace symétrique et analyse invariante*, Journal of Functional Analysis **124** (1994), 263–291.

[19] Torossian, C., *Opérateurs différentiels invariants sur les espaces symétriques I: Méthodes des orbites*, Journal of Functional Analysis **117** (1993), 118–173.

[20] —, *Opérateurs différentiels invariants sur les espaces symétriques II: L'homomorphisme d'Harish-Chandra généralisé*, Journal of Functional Analysis **117** (1993), 173–214.

[21] —, *Opérateurs différentiels invariants sur les espaces symétriques 2*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I **317** (1993), 817–819.

[22] —, *Conférences du CIMPA sur les opérateurs différentiels invariants sur les groupes et les espaces homogènes*, .
`http://wwwmathlabo.univ-poitiers.fr/CIMPA-Monastir-96/resumes_des_conferences/Torossian.ps`

[23] —, *L'homomorphisme d'Harish Chandra pour les paires symétriques orthogonales et parties radiales des opérateurs différentiels invariants sur les espaces symétriques*, Bull. Soc. math. France **126** (1998), 295–354.

[24] —, *Sur la formule combinatoire de Kashiwara-Vergne*, Journal of Lie Theory, **12** (2002), 597–616.

[25] —, *Méthodes de Kashiwara-Vergne-Rouvière pour les espaces symétriques*, in: Noncommutative Harmonic Analysis, Progress in Mathematics **220** (2004), 459–486.

[26] Vergne, M., *Le centre de l'algèbre enveloppante et la formule de Campbell-Hausdorff*, C. R. Acad. Sci. Paris, **329** (1999), Série I, 767–772.

C. Torossian
DMA-UMR 8553 du CNRS
Ecole Normale Supérieure
45 rue d'Ulm
75230 Paris cedex 05

Received November 21, 2003