Journal of Lie Theory
Volume **16** (2006) 651–689

Opérateurs réguliers dans les C^*-modules et structure des C^*-algèbres de groupes de Lie semisimples complexes simplement connexes

Francois Pierrot

Communicated by A. Valette

Résumé. Nous étudions quels opérateurs non bornés dans la catégorie des C^*-modules sont réguliers au sens de Baaj et Woronowicz: nous donnons en particulier un critère géométrique pour déterminer cette propriété analytique. Nous en déduisons des champs de représentations de groupes de Lie, en généralisant la théorie de l'intégration des représentations de l'algèbre de Lie dans des C^*-modules. Ceci nous permet de déterminer une suite de composition pour la C^*-algèbre (maximale) des groupes de Lie semisimples complexes simplement connexes et une équivalence de Morita des sous-quotients de celle-ci avec des C^*-algèbres commutatives de spectres liés aux caractères non unitaires du sous-groupe de Cartan.
Mathematics Subject Classification: Primary 22D25; Secondary 22E30, 46L08, 46L45
Keywords and Phrases: C^*-modules, opérateurs réguliers, C^*-algèbre maximale, suite de composition, groupe de Lie semisimple complexe

Introduction

La première partie de ce travail est l'étude analytique de la régularité pour des opérateurs densément définis d'adjoint densément défini dans des modules hilbertiens, encore appelés C^*-modules.

Soit G un groupe localement compact muni d'une mesure de Haar notée dg, et de fonction module Δ. Soit $C_c(G)$ l'algèbre involutive des fonctions continues sur G à support compact à valeurs complexes muni du produit de convolution, considérée comme sous-algèbre involutive dense de la C^*-algèbre $C^*(G)$ dite C^*-algèbre (on dit parfois maximale) de G (cf [5] p.270).

Rappelons (cf [10]) qu'étant donnée une C^*-algèbre A, on appelle A-module hilbertien (on dit parfois A-C^*-module) la donnée d'un A-module à droite E muni d'une application appelée produit scalaire $\langle , \rangle : E \times E \to A$ telle que pour tous $\xi, \eta \in E$, pour tous $a, b \in A$, on a $\langle \xi a, \eta b\rangle = a^*\langle \xi, \eta\rangle b$ et $\langle \xi, \xi\rangle \in A^+$ et telle que la semi-norme qui à $\xi \in E$ associe $(\|\langle \xi, \xi\rangle\|)^{1/2}$ est une norme complète

ISSN 0949–5932 / $2.50

sur E. En particulier, considérons A comme A-module de Banach à droite et le produit scalaire $\langle , \rangle : A \times A \to A$ défini par $\langle a, b \rangle = a^* b$ pour tous $a, b \in A$. Ceci munit canoniquement A d'une structure de A-module hilbertien. Dans le cas où $A = C_0(X)$, avec X espace localement compact, les A-modules hilbertiens sont en correspondance avec les champs continus d'espaces de Hilbert sur X (cf [5] p.187).

Soient E et F deux A-modules hilbertiens. Un opérateur T de E dans F est dit régulier (cf [10] chapitre 9 et 10) s'il est fermé, densément défini ainsi que son adjoint et si son graphe possède un supplémentaire orthogonal. On appelle morphisme de E dans F tout opérateur régulier de E dans F partout défini. Ce sont exactement les opérateurs réguliers continus. Contrairement au cadre hilbertien, l'adjoint d'un opérateur continu de E dans F n'est pas nécessairement partout ni même densément défini. On note $\mathbf{L}(E, F)$ l'espace des morphismes de E dans F et simplement $\mathbf{L}(E)$ l'espace des morphismes de E dans lui-même muni de sa structure de C^*-algèbre. Dans le cas du A-module hilbertien canonique A, l'algèbre $\mathbf{L}(A)$ s'identifie canoniquement à l'algèbre des multiplicateurs de A notée $\mathbf{M}(A)$.

Soit B une C^*-algèbre, soit G un B-module hilbertien. On dit que $\pi : A \to \mathbf{L}(G)$ est une représentation de A dans G, si π est un morphisme de C^*-algèbres de A dans $\mathbf{L}(G)$). Les produits tensoriels $E \odot G, F \odot G$ se (séparent et) complètent (cf [10] chapitre 4) en des B-modules hilbertiens notés $E \otimes_\pi G, F \otimes_\pi G$. A tout opérateur T fermé de E dans F densément défini et d'adjoint densément défini, on peut associer (voir sous-section I.3.) un opérateur fermé densément défini ainsi que son adjoint noté $T \otimes_\pi 1$ ou $\pi(T)$ de $E \otimes_\pi G$ dans $F \otimes_\pi G$. Quand T est régulier, l'opérateur $\pi(T)$ est régulier et nous montrons (sous-section I.3.) que T est régulier si et seulement si pour toute représentation irréductible de A dans un espace de Hilbert, on a $\pi(T^*) = \pi(T)^*$. Ceci permet d'obtenir des résultats globaux de régularité à partir de propriétés d'autoadjonction dans des espaces de Hilbert.

Les multiplicateurs des sous-algèbres involutives denses de A définissent par fermeture des opérateurs fermés densément définis ainsi que leurs adjoints dans le C^*-module A. Nous étudions en particulier pour un groupe de Lie G les opérateurs associés aux éléments de $U(\mathfrak{g})$, fermetures des multiplicateurs associés de la sous-algèbre involutive dense $C_c^\infty(G)$ de $C^*(G)$. En combinant les résultats de [16] et le critère précédent de régularité, nous démontrons la régularité essentielle des opérateurs elliptiques de l'algèbre enveloppante (sous-section I.3).

Soit $K(A)$ l'idéal de Pedersen de A qui est le plus petit idéal bilatère dense de A. Les multiplicateurs de $K(A)$ font l'objet du travail [12]. Le critère précédent fournit une démonstration très simple du fait que les multiplicateurs de l'idéal de Pedersen définissent des multiplicateurs non bornés (résultat déjà obtenu par S. Baaj, cf [1]), et nous caractérisons les multiplicateurs non bornés ainsi obtenus (cf théorème 1.30). Nous décrivons ce que nous appellerons le centre des multiplicateurs non bornés de A comme le centre de l'algèbre des multiplicateurs de l'idéal de Pedersen (proposition 1.32), ce qui généralise un résultat de Bernat-Dixmier-Segal ([2], [21]) dans le cas des opérateurs associés aux éléments du centre de l'algèbre enveloppante, et enfin une généralisation du lemme de Schur (théorème 1.34) au cadre des C^*-modules, en donnant une démonstration qui évite les notions relatives aux algèbres de von Neumann.

Dans la deuxième partie, nous définissons les représentations d'une algèbre de Lie dans un module hilbertien, et nous étudions leur intégrabilité, en particulier de celles des algèbres de Lie semisimples dont la restriction à l'algèbre de Lie d'un sous-groupe compact maximal s'intégrent.

Rappelons que dans le cas d'un espace de Hilbert, une telle étude a été faite dans [15] essentiellement grâce aux deux critères suivants :

- un opérateur symétrique fermé est autoadjoint si et seulement si il possède un domaine dense de vecteurs analytiques.

- une représentation de l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie G simplement connexe s'intègre si le Laplacien possède un domaine dense de vecteurs analytiques.

Nous développons l'analogue de la théorie de Nelson en donnant respectivement les critères de régularité et d'intégrabilité dans le cadre des modules hilbertiens.

Nous étudions également la notion de $(\mathfrak{g}, K) - B-$module hilbertien, où B est une C^*-algèbre, où $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie et où K est un groupe compact agissant par automorphismes sur $\mathfrak{g}$.

Dans la troisième et dernière partie, nous déduisons des résultats de structure de la C^*-algèbre maximale des groupes de Lie semisimples complexes simplement connexes. La classification des représentations unitaires irréductibles d'un groupe de Lie linéaire semisimple G simplement connexe de compact maximal K se ramène à la classification des $(\mathfrak{g}, K)$-modules (cf [8] p.59) unitaires irréductibles, problème de nature plus algébrique. Il y a deux points essentiels qui permettent de démontrer cette correspondance classique. D'une part, on démontre qu'étant donnée une représentation unitaire irréductible de G, tout K-type a une multiplicité finie et tout vecteur K-fini est vecteur analytique ce qui munit l'espace des vecteurs K-finis d'une structure de $(\mathfrak{g}, K)$-module irréductible unitaire. Inversement, on démontre que tout $(\mathfrak{g}, K)$-module irréductible unitaire s'intègre en une représentation unitaire fortement continue du groupe G, qui est irréductible.

Soit G un groupe de Lie semisimple complexe simplement connexe. Tout $(\mathfrak{g}, K)$-module irréductible s'obtient comme sous-quotient canonique d'une série principale associée à un caractère (non unitaire) d'un sous-groupe de Cartan H, et les classes de $(\mathfrak{g}, K)$-modules irréductibles unitaires correspondent aux caractères pour lesquels un certain "coefficient de matrice" (forme sesquilinéaire sur l'algèbre enveloppante) est positif (voir [8]). En réalisant l'analogue de la construction GNS au niveau de l'algèbre enveloppante, on obtient ce que nous appelons des représentations de l'algèbre enveloppante ou de l'algèbre de Lie dans des modules hilbertiens associés à des champs continus d'espaces de Hilbert dont nous montrons qu'elles s'intègrent.

Ceci nous permet de démontrer des résultats sur la structure de $C^*(G)$. Rappelons que la C^*-algèbre $C^*(G)$ est postliminaire (cf [5] définition 4.3.1) et donc possède une suite de composition dont les sous-quotients sont des C^*-algèbres à trace continue (cf [5] théorème 4.5.5 p.94). En considérant la filtration du dual unitaire de K donnée par la longueur du plus haut poids d'une part, un résultat sur la décomposition en K-types des représentations irréductibles de G qui résulte immédiatement de la description du dual unitaire de G qui précède d'autre part, enfin d'un résultat non-trivial (cf [23], proposition 7.13) concernant la géométrie des paramètres pour lesquels le sous-quotient canonique est unitaire, nous construisons une suite de composition de $C^*(G)$ n'ayant qu'un point limite dont tous les sous-quotients sont équivalents au sens de Morita à des C^*-algèbres commutatives et nous réalisons les bimodules hilbertiens d'équivalence de Morita grâce aux représentations dans les champs continus décrits ci-dessus. Nous concluons par quelques résultats sur la structure globale de la C^*-algèbre.

Enfin, nous traitons en annexe une étude de la transformée de Woronowicz des opérateurs pseudodifférentiels équivariants elliptiques d'ordre strictement positif sur les groupoïdes C^∞ (cf [14]).

Je remercie Saad Baaj, Michel Duflo et Georges Skandalis pour des discussions productives et le rapporteur pour ses remarques concernant la rédaction.

1. Critères de régularité dans les C^*-modules et multiplicateurs

Opérateurs réguliers dans les C^*-modules et théorème de Stone.
Dans la majeure partie, cette section consiste en des rappels. Les démonstra-tions que nous incluons concernent principalement les résultats qui n'ont pas encore été publiés.

Définitions concernant les opérateurs

Soient E et F deux groupes abéliens. Un opérateur de E dans F (ou sur E si $E = F$) est un morphisme de groupes abéliens défini sur un sous-groupe abélien de E appelé le domaine de T et noté $\operatorname{dom}(T)$ et à valeurs dans F. On note $G(T)$ son graphe i.e. le sous-groupe $\{(x, Tx) \in E \oplus F, x \in \operatorname{dom}(T)\}$ et $T : \operatorname{dom}(T) \to F$ ou $T : E \to F$. Pour tout opérateur T de E dans F, on note $T(x)$ ou simplement Tx, pour tout $x \in \operatorname{dom}(T)$, son image par T. Soit S un opérateur de E dans F. L'opérateur $T + S$ est l'opérateur de E dans F défini sur $\operatorname{dom}(T) \cap \operatorname{dom}(S)$ par $(T + S)(x) = T(x) + S(x)$ pour tout $x \in \operatorname{dom}(T) \cap \operatorname{dom}(S)$. Soient G un groupe abélien et V un opérateur de F dans G. L'opérateur noté VT ou $V.T$ est l'opérateur de E dans G défini sur $\{x \in \operatorname{dom}(T), T(x) \in \operatorname{dom}(V)\}$ par $(VT)(x) = V(T(x))$, pour tout $x \in \operatorname{dom}(T)$, tel que $T(x) \in \operatorname{dom}(V)$. Soient S et T deux opérateurs de E dans F. On dit que l'on a $S \subset T$ si $G(S) \subset G(T)$. Soient E et F deux groupes abéliens topologiques. On munit $E \oplus F$ de la structure de groupe abélien topologique produit. Soit T un opérateur de E dans F. On dit que l'opérateur T est fermé si le graphe $G(T)$ est fermé dans $E \oplus F$, qu'un sous-groupe $\mathcal{D}$ de $\operatorname{dom}(T)$ est essentiel si $\overline{G(T)} = \overline{G\left(T_{|\mathcal{D}}\right)}$ et que l'opérateur T est densément défini si le sous-groupe $\operatorname{dom}(T)$ est dense dans E.

Définition 1.1. Soit X un groupe abélien. On appelle groupe abélien à crochet (à valeurs dans X) un groupe abélien E, muni d'un bimorphisme à valeurs dans un groupe abélien X i.e. d'une application $\langle , \rangle : E \times E \to X$ qui, en chaque variable, est un morphisme de groupes abéliens. Pour tout $T \subset E$, on note $T^\perp = \{z \in E, \langle z, y \rangle = 0, y \in T\}$.

Soient E et F deux groupes abéliens à crochet à valeurs dans X et soit $E \oplus F$ le groupe abélien muni de l'application naturelle somme $\langle , \rangle : (E \oplus F)^2 \to X$ qui prolonge sur E^2 et F^2 les précédentes et telle que $E \subset F^\perp$ et $F \subset E^\perp$. On notera de façon générique $U_0 \in Mor(F \oplus E, E \oplus F)$ l'opérateur défini par $U_0((y, x)) = (-x, y)$, pour tout $(y, x) \in F \oplus E$.

Soit T un opérateur de E dans F. Si on a $\operatorname{dom}(T)^{\perp} = 0$, on note T^* l'opérateur défini par $G(T^*) = U_0^{-1}\left(G(T)^{\perp}\right)$. Si on a $E = F$, on dit que l'opérateur T est symétrique si $T \subset T^*$. On dit que l'opérateur T est d'adjoint densément défini si l'opérateur T^* est défini et densément défini. S'il existe $\phi \in \operatorname{Aut}(X)$ tel qu'on a $\langle y, z\rangle = \phi(\langle z, y\rangle)$, pour tout $(y, z) \in (E \oplus F)^2$, alors, pour tout opérateur T de E dans F, d'adjoint densément défini, on a $T \subset T^{**}$.

Si E et F sont de plus munis d'une structure d'espace vectoriel, on dira qu'une application T d'un sous-ensemble de E vers F est un opérateur si et seulement c'est un opérateur du groupe abélien sous-jacent E vers le groupe abélien sous-jacent F et si son graphe est un sous-espace vectoriel.

Régularité des opérateurs dans les C^*-modules

Soient A une C^*-algèbre, soient E et F deux A-modules hilbertiens. Rappelons la définition suivante ([1], [27]) :

Définition 1.2. On dit qu'un opérateur $T : E \to F$ est régulier s'il est fermé densément défini ainsi que son adjoint et s'il vérifie l'une des assertions équivalentes suivantes :

1. $1 + T^*T$ est d'image dense.
2. $1 + T^*T$ est surjectif.
3. $G(T) \oplus U_0(G(T^*)) = E \oplus F$.

Comme par définition, on a $U_0(G(T^*)) = G(T)^{\perp}$, la troisième condition signifie que le module $G(T)$ est un sous-module orthocomplémenté de $E \oplus F$. Pour la démonstration de l'équivalence des assertions précédentes, voir [10] chapitre 9. On notera $L^{nb}(E, F)$ l'ensemble des opérateurs réguliers de E dans F et $M^{nb}(A) = L^{nb}(A, A)$.

Transformation de Woronowicz

Le théorème suivant est dû à S. Woronowicz [27] (voir aussi [17] et [10] Theorem 10.4).

Théorème 1.3. (1) *Soit T un opérateur régulier de E dans F. Alors on a $(1 + T^*T)^{-1} \in \mathbf{L}(E)$ et $\operatorname{dom}(T) = Im\left(\left((1 + T^*T)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\right)$. Notons $Q(T)$ l'opérateur $T\left((1 + T^*T)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}$. Alors on a $Q(T) \in \mathbf{L}(E, F)$. De plus, on a $1 - Q(T)^* Q(T) = (1 + T^*T)^{-1}$ et $Q(T)^* = Q(T^*)$.*

(2) *Soit $Q(E, F)$ l'ensemble des opérateurs $Q \in \mathbf{L}(E, F)$ tels que $\|Q\| \leq 1$, et $1 - Q^*Q$ est d'image dense dans E. L'application de $L^{nb}(E, F)$ dans $Q(E, F)$ qui à $T \in L^{nb}(E, F)$ associe $Q(T) \in Q(E, F)$ est une bijection appelée transformation de Woronowicz.*

Un opérateur fermé densément défini ainsi que son adjoint n'est pas nécessairement régulier. Le contre-exemple suivant est dû à M. Hilsum.

Exemple : soient T_1 et T_2 deux opérateurs autoadjoints sur un espace de Hilbert $\mathbb{H}$, qui coïncident sur l'intersection de leurs domaines qui est dense et soit T_0

l'opérateur symétrique densément défini dont le graphe est $G(T_1) \cap G(T_2)$. Soit $E = \mathbb{H} \otimes C([-1,1])$ le $C([-1,1])$-module hilbertien. Définissons la fonction $i : [-1,1] \to \mathbb{C}$ par $i(t) = 1$, pour tout $t \leq 0$, et $i(t) = 2$, pour tout $t > 0$. Soit T l'opérateur densément défini de E dans E de domaine $\mathcal{E} = \{\xi \in E,\ \forall t \leq 0, \xi(t) \in \mathrm{dom}(T_1),\ \forall t \geq 0,\ \xi(t) \in \mathrm{dom}(T_2)\}$ et défini par $(T\xi)(t) = T_{i(t)}(\xi(t))$, pour tous $\xi \in \mathcal{E}, t \in [-1,1]$. Evidemment, l'opérateur T est symétrique. Soit $\xi \in \mathrm{dom}(T^*)$. Alors on a $\lim_{t\to 0, t<0}(\xi_t, (T^*\xi)_t) = (\xi_0, (T^*\xi)_0)$, et comme l'opérateur T_1 est fermé, on a $\xi_0 \in \mathrm{dom}(T_1)$ et $(T^*\xi)_0 = T_1(\xi_0)$. De même, on a $\xi_0 \in \mathrm{dom}(T_2)$ et $(T^*\xi)_0 = T_2(\xi_0)$. D'où $T^* = T$. Comme on a $T_0 \subset T_0^*$ et $T_0 \neq T_0^*$, il existe $(\xi_0, \eta_0) \in \mathbb{H} \oplus \mathbb{H} \setminus (G(T_0) \oplus U_0(G(T_0)))$. Soit $(\xi, \eta) \in E \oplus E$ tel que $(\xi, \eta)_0 = (\xi_0, \eta_0)$. Alors on a $(\xi, \eta) \notin G(T) \oplus U_0(G(T)) = G(T) \oplus U_0(G(T^*))$. Ainsi, l'opérateur T est autoadjoint densément défini mais n'est pas régulier.

Définition 1.4. Soient A une C^*-algèbre, soit E un A-module hilbertien. Un opérateur régulier sur E est dit normal si on a $T^*T = TT^*$.

Remarque : ceci équivaut au fait que l'opérateur $Q(T)$ est normal.

Multiplicateurs et théorème de Stone dans les C^*-modules

Le corps k est celui des nombres complexes. Soit $\mathcal{A}$ une algèbre (sur k). On note $Z(\mathcal{A})$ son centre.

Définition 1.5. Soit $\mathcal{A}$ une algèbre. On appelle multiplicateur de $\mathcal{A}$ toute paire d'applications linéaires (γ, δ) de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$ telle que pour tous $a, b \in \mathcal{A}$, on a : $a\gamma(b) = \delta(a)b$.

On notera $M(\mathcal{A})$ l'ensemble des multiplicateurs de $\mathcal{A}$ que l'on considèrera comme muni de la structure d'algèbre pour l'addition des applications linéaires et pour la multiplication suivante : $(\gamma_1, \delta_1)(\gamma_2, \delta_2) = (\gamma_1 \circ \gamma_2, \delta_2 \circ \delta_1)$.

L'application qui à $a \in \mathcal{A}$ associe $(\gamma_a, \delta_a) \in M(\mathcal{A})$ définie par : $\gamma_a(b) = ab$, $\delta_a(b) = ba, b \in \mathcal{A}$ est un morphisme d'algèbre. On conviendra qu'une algèbre $\mathcal{A}$ est *non dégénérée* si pour tout $a \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$, on a $\gamma_a \neq 0$ et $\delta_a \neq 0$.

Par la suite, toute algèbre sera supposée non dégénérée et sera considérée comme plongée dans l'algèbre de ses multiplicateurs via le morphisme défini ci-dessus.

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre involutive d'involution antilinéaire $\sharp$. Soit $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ l'espace des applications linéaires de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$.

Définition 1.6. Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$. Une application $T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ sera dite adjointe à T si on a $b^\sharp T(a) = (T^*(b))^\sharp a, a, b \in \mathcal{A}$

Soit $\mathcal{L}^*(\mathcal{A})$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ qui possèdent un adjoint.

Proposition 1.7. *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre involutive. Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$.*

(1) *L'opérateur T admet au plus un adjoint; s'il en admet un, on note cet adjoint $T^\sharp$. L'opérateur $T^\sharp$ admet T comme adjoint.*

(2) *L'espace $\mathcal{L}^*(\mathcal{A})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(\mathcal{A})$. L'application qui à $T \in \mathcal{L}^*(\mathcal{A})$ associe $T^\sharp$, la munit d'une structure d'algèbre involutive compatible avec celle de $\mathcal{A}$.*

(3) *L'application qui à $T \in \mathcal{L}^*(\mathcal{A})$, associe $\left(T, \sharp \circ T^\sharp \circ \sharp\right)$ identifie l'algèbre $\mathcal{L}^*(\mathcal{A})$ à l'algèbre involutive des multiplicateurs de $\mathcal{A}$.*

Démonstration. (1) On considère $\phi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to X$ où $X = \mathcal{A}$ et $\phi(a,b) = a^\sharp b, a, b \in \mathcal{A}$. Alors l'opérateur S de $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ est adjoint de T si et seulement si il l'est au sens de la fin de la section I.1. avec $E = F = \mathcal{A}$ et l'assertion en résulte.

(2) On vérifie aisément que pour tous $T_1, T_2 \in \mathcal{L}^*(\mathcal{A})$, l'opérateur $T_1^\sharp + T_2^\sharp$ est l'adjoint de $T_1 + T_2$ et que l'opérateur $T_1^\sharp T_2^\sharp$ est l'adjoint de $T_2 T_1$.

(3) Soit $T \in \mathcal{L}^*(\mathcal{A})$. Alors pour tous $a, b \in \mathcal{A}$, on a $\left(\sharp \circ T^\sharp \circ \sharp(b)\right) a = \left(T^\sharp\left(b^\sharp\right)\right)^\sharp a = b(Ta)$. Donc on a $\left(T, \sharp \circ T^\sharp \circ \sharp\right) \in M(\mathcal{A})$. Réciproquement, soit $(\gamma, \delta) \in M(\mathcal{A})$. Alors pour tous $a, b \in \mathcal{A}$, on a $b^\sharp \gamma(a) = \delta\left(b^\sharp\right) a = \left(\delta\left(b^\sharp\right)^\sharp\right)^\sharp a$. Donc on a $\sharp \circ \delta \circ \sharp = \gamma^\sharp$. ■

En particulier, l'algèbre $M(\mathcal{A})$ est ainsi munie d'une structure d'algèbre involutive compatible avec celle de $\mathcal{A}$. Dans le cas où on désigne par A une C^*-algèbre, on notera $\mathbf{M}(A)$ la C^*-algèbre obtenue en munissant $M(A)$ de la norme d'opérateur (il résulte aisément du théorème de Banach-Steinhaus que tout multiplicateur est continu et on vérifie trivialement la complétion de $\mathbf{M}(A)$). Son involution est notée $*$ comme celle de A.

Soit X un espace localement compact. On vérifie immédiatement que le plongement de l'algèbre $C_b(X)$ des fonctions continues complexes sur X bornées dans l'algèbre $\mathbf{M}(C_0(X))$ des multiplicateurs de l'algèbre $C_0(X)$ des fonctions continues complexes sur X tendant vers 0 à l'infini comme idéal dans l'algèbre $C_b(X)$ dans l'algèbre des fonctions continues bornées sur X induit une isomorphisme canonique entre $C_b(X)$ et la C^*-algèbre $\mathbf{M}(C_0(X))$.

Définition 1.8. On dira qu'une action d'une algèbre de Banach A sur un espace de Banach E définit une structure de (A-)module de Banach sur E (ou A-module banachique) s'il existe une constante $C > 0$ telle que $\|a.e\| \leq C\|a\|\|e\|$, pour tous $a \in A$, $e \in E$. Un module de Banach sur une algèbre de Banach A est dit non dégénéré si l'espace vectoriel engendré par $\{a.e, a \in A, e \in E\}$ est dense dans E.

Lemme 1.9. *Soit A une algèbre de Banach munie d'une unité approchée bornée. Soit E un A-module de Banach non dégénéré. Alors il existe sur E une unique structure de $M(A)$-module de Banach compatible avec la structure de A-module de Banach sur E.*

Démonstration. Soit $(u_i)_{i \in I}$ est une unité approchée bornée (cf [22], chapitre 15). Soit $m \in M(A)$. Soient $a \in A$ et $e \in E$. Alors on a $\lim_{i \in I}(mu_i).(a.e)$ existe dans E et vaut $(m(\lim_{i \in I}(u_i a)).e)$. Soit $C \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $\|a.e\| \leq C\|a\|\|e\|$, pour tout $a \in A$, pour tout $e \in E$. Il s'ensuit que le filtre $(mu_i)_{i \in I}$ converge sur un sous-espace vectoriel dense de E et que, comme cette famille d'opérateurs sur E est uniformément bornée par $C\|m\|$, la limite forte sur E $\lim_{i \in I} mu_i$ existe et est un opérateur de norme inférieure à $C\|m\|$. On vérifie immédiatement que cela définit une structure comme dans l'énoncé. ■

Soit E un $C_0(\mathbb{R})$-module banachique. Pour $s \in \mathbb{R}$, on note $\psi_s \in C_b(\mathbb{R})$ la fonction définie par $\psi_s(t) = e^{ist}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Lemme 1.10. (1) *Pour tout* $x \in E$, *l'application de* $\mathbb{R}$ *dans* E *qui à* $s \in \mathbb{R}$ *associe* $\psi_s.x$ *est continue de* $\mathbb{R}$ *à valeurs dans* E.

(2) *Soit* f *une fonction dans l'espace de Schwarz* $S(\mathbb{R})$ *et soit* $\hat{f}$ *sa transformée de Fourier qui est intégrable et telle que* $f = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(s)\,\psi_s$. *Pour tout* $x \in E$, *on a* $f.x = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{[-n,n]} \hat{f}(s)\,\psi_s.xds$.

(3) *Soit* F *un sous-espace de Banach de* E. *Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Le sous-espace* F *est un sous-*$C_0(\mathbb{R})$*-module Banachique.*

(ii) *Pour tout* $s \in \mathbb{R}$, *on a* $\psi_s F \subset F$.

Démonstration. (1) Comme $\|\psi_s(x)\| = \|x\|$, pour tous $s \in \mathbb{R}, x \in E$, on se ramène comme précédemment au cas où $x = a.e$, avec $a \in C_0(\mathbb{R})$ et $e \in E$ et l'assertion résulte alors du fait que l'application qui à $s \in \mathbb{R}$, associe $\psi_s.a$ est continue de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $C_0(\mathbb{R})$.

(2) Comme $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, pour tout $f \in S(\mathbb{R})$, on peut à nouveau se ramener au cas où $x = a.y$, avec $a \in C_0(\mathbb{R}), y \in E$. Alors pour tout $s \in \mathbb{R}$, on a $\psi_s.x = (\psi_s.a).y$. Or on a $f.a = \frac{1}{2\pi}\lim_{n\to+\infty}\int_{[-n,n]} \hat{f}(t)\,\psi_t.a$, pour tout $f \in S(\mathbb{R})$, d'où l'assertion en appliquant à e à l'égalité précédente.

(3) Soit $(u_i)_{i\in I}$ une unité approchée bornée de $C_0(\mathbb{R})$. Si (i) est vérifiée, alors on a $f = \lim_{i\in I} u_i.f$, pour tout $f \in F$, pour tout $b \in C_b(\mathbb{R})$, et donc $b.f = \lim_{i\in I}(bu_i).f \in F$. D'où (ii). Inversement, soit $x \in F$ tel qu'on a $\psi_s.x \in F$, pour tout $s \in \mathbb{R}$. Alors on a $f.x = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(s)\,\psi_s.xds \in F$, pour tout $f \in S(\mathbb{R})$. Comme le sous-espace vectoriel $S(\mathbb{R})$ est dense dans $C_0(\mathbb{R})$, l'espace $C_0(\mathbb{R}).x$ est inclus dans F. Donc ii) implique i). ∎

Rappelons que l'identification de groupes topologiques localement compacts entre $\mathbb{R}$ et son dual unitaire induit une identification canonique entre $C^*(\mathbb{R})$ et $C_0(\mathbb{R})$. On obtient ainsi des équivalences de catégories entre la catégorie des représentations unitaires fortement continues de $\mathbb{R}$ dans les C^*-modules, la catégorie des représentations non-dégénérées de la C^*-algèbre $C^*(\mathbb{R})$ dans les C^*-modules, et la catégorie des représentations non-dégénérées de la C^*-algèbre $C_0(\mathbb{R})$ dans les C^*-modules. Toute représentation non dégénérée de $C_0(\mathbb{R})$ dans un C^*-module E munit l'espace de Banach E d'une structure de $C_0(\mathbb{R})$-module banachique (pour la constante $C = 1$), et donc d'après le lemme qui précède, d'une structure de $C_b(\mathbb{R})$-module banachique. Soit A une C^*-algèbre, soient E et F deux A-modules hilbertiens et soit T un opérateur de E dans F. Soit $q : \mathbb{R} \to]-1,1[$ l'homéomorphisme défini par $q(t) = t(1+t^2)^{-1/2}, t \in \mathbb{R}$. Soit T un opérateur régulier autoadjoint normal sur E. Alors l'opérateur $Q(T)$ de $\mathbf{L}(E)$ est autoadjoint de spectre contenu dans $[-1,1]$. En considérant $C_0(]-1,1[)$ comme plongée dans $C([-1,1])$, on pose $f(T) = (f \circ q^{-1})(Q(T))$ pour $f \in C_0(\mathbb{R})$, et $f.\xi = f(T)(\xi)$, pour tout $\xi \in E$. Comme l'opérateur $(1-Q^2)(T) = 1 - Q(T)^2$ est d'image dense, et comme $1 - Q^2(T) \in C_0(\mathbb{R})$, ceci définit sur E une structure canonique de $C_0(\mathbb{R})$-module banachique non dégénéré et donc une structure canonique de $C_b(\mathbb{R})$-module banachique. Pour $f \in C_b(\mathbb{R})$, l'opérateur noté $f(T)$ et défini par $f(T)(\xi) = f.\xi$, pour tout $\xi \in E$, appartient à $\mathbf{L}(E)$.

Le théorème suivant constitue la généralisation au cadre des C^*-modules du théorème de Stone (théorème 24.15 de [22]).

Théorème 1.11. *Soit A une C^*-algèbre, soit E un A-module hilbertien.*

(1) *Soit T un opérateur régulier autoadjoint de E dans E. L'application $t \mapsto \psi_t(T)$ est une représentation unitaire fortement continue du groupe localement compact $\mathbb{R}$ dans E.*

(2) *Pour toute représentation unitaire fortement continue $U : \mathbb{R} \to U(E)$, il existe un unique opérateur régulier autoadjoint T de E dans E tel que $U(t) = \psi_t(T)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$. Son graphe $G(T)$ est l'ensemble des couples $(x, y) \in E \oplus E$ tels que $t \mapsto U(t)x$ est dérivable en 0 de dérivée iy.*

La proposition suivante généralise un résultat classique et m'a été indiquée dans le cadre des modules hilbertiens par S. Baaj et G. Skandalis.

Proposition 1.12. *Soit T un opérateur régulier autoadjoint agissant dans un C^*-module E. On suppose que le sous-espace $\mathcal{D}$ de* $\mathrm{dom}(T)$ *est dense et invariant par le groupe à un paramètre associé à l'opérateur régulier à T. Alors l'espace vectoriel $\mathcal{D}$ est un domaine essentiel pour T.*

Démonstration. On considère E comme muni de la structure de $C_0(\mathbb{R})$-module banachique, définie par $f.\xi = f(T)(\xi)$, pour tous $f \in C_0(\mathbb{R}), \xi \in E$ et $E \oplus E$ de la structure somme. Alors le graphe $G(T)$ est un sous-$C_0(\mathbb{R})$-module banachique de $E \oplus E$. D'après le lemme 1.10 (3), le graphe $G = \overline{G\left(T_{|\mathcal{D}}\right)}$ est un sous-$C_0(\mathbb{R})$-module banachique de $G(T)$. L'application θ de E dans $G(T)$ qui à ξ associe $\left((1+T^2)^{-1/2}\xi, T(1+T^2)^{-1/2}\xi\right)$ est un isomorphisme de $C_0(\mathbb{R})$-modules banachiques. En identifiant E et $G(T)$ par cet isomorphisme, la restriction p_1 à G de la première projection s'identifie à l'opération de multiplication par $q \in C_0(\mathbb{R})$ définie par $q(t) = (1+t^2)^{-1/2}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$. Comme le sous-espace vectoriel $p_1(G)$ est dense dans E, l'espace vectoriel qG est dense dans $G(T)$, et donc le sous-espace vectoriel G de $G(T)$ qui contient qG, l'est. ∎

Composition et régularité.

L'objet de cette partie est de ramener divers problèmes concernant les opérateurs non bornés dans les C^*-modules au cas où le C^*-module est le C^*-module canonique associé à la C^*-algèbre, ceci en changeant de C^*-algèbre. Ceci fait intervenir la notion de composition des modules hilbertiens et la notion correspondante de composition d'opérateurs que nous étudions dans le cas des opérateurs A-linéaires continus (lemme 1.14), et d'opérateurs densément définis fermés ainsi que leur adjoint (lemme 1.15). Enfin, nous donnons un critère de régularité en terme de composition (théorème 1.18).

Soit A une C^*-algèbre. Soient E et F deux A-modules hilbertiens. On notera $\mathbf{K}(E, F)$ (resp. $\mathbf{K}(E)$ quand $E = F$) le $\mathbf{L}(F) - \mathbf{L}(E)$-bimodule des opérateurs compacts de E dans F (cf [10]) (resp. de E dans E) inclus dans $\mathbf{L}(E, F)$ (resp. dans $\mathbf{L}(E)$ quand $E = F$) qui en tant qu'espace vectoriel est l'adhérence de l'espace vectoriel engendré par $\{\theta_{\xi,\eta}, \xi \in F, \eta \in E\}$ (resp. $\{\theta_{\xi,\eta}, \xi \in E, \eta \in E\}$) où on définit $\theta_{\xi,\eta} \in \mathbf{L}(E, F)$ par $\theta_{\xi,\eta}(\zeta) = \xi\langle\eta, \zeta\rangle$, pour tous $\xi \in F$ (resp. $\xi \in E$), $\eta \in E$, $\zeta \in E$.

Soient E un A-module hilbertien et F un B-module hilbertien. On dit que F est un A-B-bimodule hilbertien (de représentation structurale π) si on se donne $\pi : A \to \mathbf{L}(F)$. On rappelle que $E \otimes_A F$ (qu'on note également $E \otimes_\pi F$) désigne le B-module hilbertien en séparant-complétant le produit tensoriel algébrique $E \odot F$ (sur $\mathbb{C}$) muni de la structure préhilbertienne définie par $\langle \xi \odot u, \eta \odot v \rangle = \langle u, \pi(\langle \xi, \eta \rangle) v \rangle$, pour tous $\xi, \eta \in E, u, v \in F$. Pour de tels vecteurs, on note $\xi \otimes u$ l'élément associé dans $E \otimes_A F$. De plus, pour tout $T \in \mathbf{L}(E)$, il existe un unique élément de $\mathbf{L}(E \otimes_A F)$ noté $T \otimes_\pi 1$ ou $\pi(T)$ tel que $\pi(T)(\xi \otimes v) = T(\xi) \otimes v$, pour tous $\xi \in E,\ v \in G$, et on a $\|\pi(T)\| \leq \|T\|$.

Lemme 1.13. *Soit A une C^*-algèbre et soit E un B-module hilbertien. Soit $\pi : \mathbf{K}(E) \to \mathbf{L}(E)$ la représentation naturelle qui induit une identification naturelle notée encore π entre $\mathbf{K}(E) \otimes_\pi E$ et E définie par $\pi(T \otimes \xi) = T(\xi) \in E$, pour tous $T \in \mathbf{K}(E),\ \xi \in E$.*

(1) *L'application ψ qui à un sous-$\mathbf{K}(E)$-module hilbertien G de $\mathbf{K}(E) \oplus \mathbf{K}(E)$ associe le sous-A-module hilbertien $G \otimes_\pi E$ de $E \oplus E$, est une bijection d'inverse notée χ.*

(2) *L'application ψ induit par restriction une bijection, notée encore ψ, d'inverse notée encore χ, entre l'ensemble des graphes d'opérateurs fermés (resp. et densément définis) sur $\mathbf{K}(E)$ et l'ensemble des graphes d'opérateurs fermés (resp. et densément définis) sur E.*

(3) *Soit T un opérateur fermé sur E. Alors on a $\chi(G(T)) = \{(k_1, k_2) \in \mathbf{K}(E) \oplus \mathbf{K}(E), k_2 = Tk_1\}$. De plus, l'opérateur T admet un adjoint si et seulement si l'opérateur $\chi(T)$ en admet un aussi. On a alors $\chi(T)^* = \chi(T^*)$. De plus, l'opérateur T est continu si et seulement si $\chi(T)$ est continu et dans ce cas, ils ont même norme.*

Démonstration. (1) Soit $E^* = \mathbf{K}(E, A)$ considéré comme A-$\mathbf{K}(E)$-bimodule hilbertien. Soit J_E l'idéal bilatère fermé de A engendré par l'ensemble $\{\langle \xi, \eta \rangle, \xi, \eta \in E\}$. Soit χ l'application qui à un sous-module hilbertien F de $E \oplus E$ associe $\chi(F) = F \otimes_A E^*$ considéré comme sous-$\mathbf{K}(E)$-module hilbertien de $\mathbf{K}(E) \oplus \mathbf{K}(E)$. Alors, on a $\chi(\psi(G)) = G$, pour tout sous-$\mathbf{K}(E)$-module hilbertien G de $\mathbf{K}(E) \oplus \mathbf{K}(E)$. Pour tout sous-$A$-module hilbertien F de $E \oplus E$, on a $\psi(\chi(F)) = FJ_E = F$.

(2) Soit G un sous-module hilbertien de $\mathbf{K}(E) \oplus \mathbf{K}(E)$ qui est un graphe. Soit $\eta \in E$ tel que $(0, \eta) \in \psi(G)$. Alors $(0, \theta_{\eta,\eta}) \in \chi(\psi(G)) = G$. Comme G est un graphe, on a $\theta_{\eta,\eta} = 0$ et $\eta = 0$. Donc l'espace vectoriel $\psi(G)$ est un graphe fermé. Réciproquement, soit G un sous-module hilbertien de $E \oplus E$ qui est un graphe. Soit $(0, k) \in \chi(G)$. Alors on a $0 \oplus k(E) \subset G$ donc on a $k(E) = 0$ et $k = 0$. Donc l'espace vectoriel $k(G)$ est un graphe. Les autres assertions sont triviales.

(3) Soit $G_T = \{(k_1, k_2) \in \mathbf{K}(E) \oplus \mathbf{K}(E), k_2 = Tk_1\}$ qui est le graphe d'un opérateur $\mathbf{K}(E)$-linéaire fermé. Trivialement, on a $\psi(G_T) \subset G(T)$, donc $G_T \subset \chi(G(T))$ et par définition $\chi(G(T))$ est la fermeture d'un module inclus dans G_T donc on a $\chi(G(T)) \subset G_T$ d'où $\chi(G(T)) = G_T$. L'opérateur T admet un adjoint si et seulement si $(\mathrm{dom}(T))^\perp = 0$. Supposons $\mathrm{dom}(T)^\perp = 0$. Alors pour tout $k \in \mathrm{dom}(\chi(T))^\perp = \{k \in \mathbf{K}(E), k^* k_1 = 0, k_1 \in \mathrm{dom}(\chi(T))\}$, on a $\langle k\xi, k_1\eta \rangle = 0, k_1 \in \mathrm{dom}(\chi(T)), \eta \in E, \xi \in E$ donc $\langle k\xi, \eta \rangle = 0,\ \eta \in \mathrm{dom}(T), \xi \in E$ donc $k = 0$.

Finalement, on a $\mathrm{dom}(\chi(T))^\perp = 0$. Réciproquement, si $(\mathrm{dom}(\chi(T)))^\perp = 0$, alors pour tous $\xi \in (\mathrm{dom}(T))^\perp,\ \eta \in E$, on a $\theta_{\xi,\eta} \in (\mathrm{dom}(\chi(T)))^\perp$ car

$\langle\theta_{\xi,\eta}(\theta), k_1\zeta\rangle = \langle 0, k_2\zeta\rangle = 0$, pour tous $(k_1, k_2) \in G(\chi(T)), \theta, \zeta \in E$, donc $\xi = 0$, et $(\mathrm{dom}(T))^{\perp} = 0$.

Par définition, on a $G(\chi(T^*)) = \{(k_1, k_2) \in \mathbf{K}(E) \oplus \mathbf{K}(E), k_2 = T^* k_1\} \subset G(\chi(T)^*)$. De plus, on a $(k_3, k_4) \in G(\chi(T)^*)$ si et seulement si $k_3^* k_2 = k_4^* k_1$, pour tout $(k_1, k_2) \in G(\chi(T))$, si et seulement si $\langle\eta, k_3^* k_2\xi\rangle = \langle\eta, k_4^* k_1\xi\rangle$, pour tous $(k_1, k_2) \in G(\chi(T)), \xi, \eta \in E$, si et seulement si $\langle k_3\eta, k_2\xi\rangle = \langle k_4\eta, k_1\xi\rangle$, pour tous $(k_1, k_2) \in G(\chi(T)), \xi, \eta \in E$, si et seulement si $\langle k_4\eta, \xi\} = \langle k_3\eta, T\xi\rangle$, pour tous $\xi \in \mathrm{dom}(T), \eta \in E$ (car $\chi(\psi(G(T))) = G(T)$) si et seulement si $k_4 = T^* k_3$ (aisé) soit $\langle k_3, k_4\rangle \in G(\chi(T^*))$.

Il est aisé que $\|\chi(T)\| \leq \|T\|$. Dans l'autre sens, soit $\xi \in \mathrm{dom}(T)$ tel que $\|\xi\| = 1$. Alors on a $\theta_{\xi,T\xi} \in \mathrm{dom}(\chi(T))$ et on a $\|\chi(T)(\theta_{\xi,T\xi})\| = \|\theta_{T\xi,T\xi}\| = \|T\xi\|^2$. Comme on a $\|\theta_{\xi,T\xi}\| \leq \|T\xi\|$ pour tout $\xi \in \mathrm{dom}(T)$, on a $\|\chi(T)\| \geq \|T\xi\|$ et finalement $\|\chi(T)\| = \|T\|$. ■

Lemme 1.14. *Soient E et F deux A-modules hilbertiens. Soit $T : E \to F$ un opérateur A-linéaire continu.*

(1) *Soient $\xi_1, \ldots, \xi_n \in E$. Alors $(\langle\xi_i, \xi_j\rangle)_{(i,j)\in I^2} \leq \|T\|^2 (\langle\xi_i, \xi_j\rangle)_{(i,j)\in I^2} \in M_n(A)_+$.*

(2) *Soit G un B-bimodule hilbertien et soit $\pi : A \to \mathbf{L}(G)$ un morphisme. Alors il existe un unique opérateur noté $T \otimes_\pi 1$ ou $\pi(T) : E \otimes_\pi G \to F \otimes_\pi G$ défini par $\pi(T)(\xi \otimes g) = T\xi \otimes g$, pour tous $\xi \in E$, $g \in G$. De plus, on a $\|\pi(T)\| \leq \|T\|$.*

Démonstration. Supposons d'abord $E = F = A$. Soit $\xi_1, \ldots \xi_n \in A$. Soit $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une unité approchée de A de norme ≤ 1 de sorte que pour tout $i \in I = \{1, ..., n\}$, on a $\lim_\Lambda u_\lambda \xi_i = \xi_i$. Alors on a $(\xi_i^* (Tu_\lambda)^* (Tu_\lambda) \xi_j)_{(i,j)\in I^2} \leq \|T\|^2 (\xi_i^* \xi_j)_{(i,j)\in I^2}$, pour tout $\lambda \in \Lambda$. Or comme T est continu, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a $lim_\Lambda T(u_\lambda \xi_i) = T\xi_i$. D'où l'inégalité cherchée. Passons au cas général. Quitte à remplacer E et F, par $E \oplus F$, on peut supposer que $E = F$. Soit $\tilde{T} = \chi(T)$ l'opérateur associé sur $\mathbf{K}(E)$ (cf lemme 1.13). Pour tout $i = 1, \ldots, n$, soit $\eta_i \in E$, tel que $\xi_i = \eta_i \langle\eta_i, \eta_i\rangle$ (d'après la proposition 19.7 de [22], un tel η_i existe) et soit $k_i = \theta_{\eta_i,\eta_i} \in \mathbf{K}(E)$. Alors, par ce qui précède, on a $\left(\langle\tilde{T}k_i, \tilde{T}k_j\rangle\right)_{(i,j)\in I^2} \leq \|T\|^2 (k_i^* k_j)_{(i,j)\in I^2}$ et donc on a $(\langle T\xi_i, T\xi_j\rangle)_{(i,j)\in I^2} = \left(\langle\eta_i, \langle\tilde{T}k_i, \tilde{T}k_j\rangle\eta_j\rangle\right)_{(i,j)\in I^2} \leq \|T\|^2 (\langle\eta_i, k_i^* k_j \eta_j\rangle)_{(i,j)\in I^2} = \|T\|^2 (\langle\xi_i, \xi_j\rangle)_{(i,j)\in I^2}$. La seconde assertion résulte aisément de la première. ■

Lemme 1.15. *Soit A une C^*-algèbre et soient E et F deux A-modules hilbertiens. Soit T un opérateur de E dans F fermé densément défini ainsi que son adjoint. Soit B une C^*-algèbre, soit H un B-module hilbertien et soit $\pi : A \to \mathbf{L}(H)$ une représentation. Alors on a :*

(1) *Le module $G(T) \otimes_\pi H$ est le graphe d'un opérateur fermé densément défini sur $E \otimes_\pi H$ dont l'adjoint est densément défini, et qu'on note $\pi(T)$ (ou $T \otimes_\pi 1$).*

(2) *On a $\pi(T^*) \subset (\pi(T))^*$. Si l'opérateur T est régulier, alors l'opérateur $\pi(T)$ est régulier; d'autre part, on a $(\pi(T))^* = \pi(T^*)$ et $Q(\pi(T)) = \pi(Q(T))$.*

(3) *Si l'espace vectoriel* $\mathcal{D}$ *est un domaine essentiel pour* T, *alors l'image du produit tensoriel algébrique de* $\mathcal{D}$ *et de* H *dans* $E \otimes_\pi H$ *est un sous-espace essentiel pour* $\pi(T)$.

(4) *En général, on a* $\|\pi(T)\| \le \|T\|$ *et si le morphisme* π *est injectif, alors on a* $\|T\| = \|\pi(T)\| \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

(5) *Soit* $\pi' : B \to \mathbf{L}(K)$ *une représentation de* B *dans un module hilbertien* K. *Alors on a* $\pi'(\pi(T)) = \pi' \circ \pi(T)$, *où* $\pi' \circ \pi : A \to \mathbf{L}(H \otimes_{\pi'} K)$ *est défini par* $\pi' \circ \pi(a) = \pi(a) \otimes_{\pi'} 1$ *pour tout* $a \in A$.

Démonstration. (1) Comme l'image du produit tensoriel algébrique de $\operatorname{dom}(T)$ et de H dans $E \otimes_\pi H$ est contenue dans $\operatorname{dom}(T)$, l'opérateur T est densément défini. On a $G(T) \otimes_\pi H \perp U_0(G(T^*) \otimes_\pi H)$. Or l'image par la projection orthogonale sur $F \otimes_\pi H$ de $U_0(G(T^*) \otimes_\pi H)$ est dense. Donc l'opérateur $G(T) \otimes_\pi H$ est le graphe d'un opérateur $\pi(T)$ fermé densément défini ainsi que son adjoint.

(2) On a $\pi(T^*) \subset (\pi(T))^*$ et en particulier, l'opérateur $\pi(T)^*$ est densément défini. Si l'opérateur T est régulier, alors on a $G(T) \oplus U_0(G(T^*)) = E \oplus F$, donc on a $G(T) \otimes_\pi H \oplus U_0(G(T^*) \otimes_\pi H) = (E \oplus F) \otimes_\pi H$. Donc l'opérateur $\pi(T)$ est régulier et on a $\pi(T^*) = (\pi(T))^*$. Soient $S = 1 + T^*T$ et $S_\pi = 1 + \pi(T)^* \pi(T)$ les opérateurs réguliers autoadjoints respectivement sur E et $E \otimes_\pi H$. On a $\pi(S) \subset S_\pi$ et par normalité, on a $S_\pi = \pi(S)$. Comme $\pi\left(S^{-1/2}\right)$ est borné, l'opérateur $\pi(T)\pi\left(S^{-1/2}\right)$ est fermé et on a $\pi(Q(T)) \subset \pi(T)\pi\left(S^{-1/2}\right)$, et comme $\pi(Q(T))$ est borné, on a $Q(\pi(T)) = \pi(Q(T))$.

(3) Comme $G\left(T_{|\mathcal{D}}\right)$ est dense dans $G(T)$, l'image du produit tensoriel de $G\left(T_{|\mathcal{D}}\right)$ et de H est dense dans $G(T) \otimes_\pi H = G(\pi(T))$.

(4) On peut supposer que $E = F$. Si on a $\|T\| < +\infty$, alors l'opérateur $T \in \mathbf{L}(E)$ et le résultat résulte de l'égalité $(\pi(T))^* \pi(T) + (\pi(S))^* \pi(S) = \|T\|^2$ où $S = \sqrt{\|T\|^2 - T^*T} \in \mathbf{L}(E)$. Supposons qu'on a $\|T\| = +\infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\xi_n \in E$, tel que $\|\xi_n\| \le 1$, et $\|T\xi_n\| \ge 2n$, puis $g_n \in H$, tel que $\|g_n\| \le 1$, $\|\langle g_n, \pi(\langle T\xi_n, T\xi_n\rangle) g_n\rangle\| \ge n^2$. Alors on a $\|\xi_n \otimes g_n\| \le 1$ et $\|\pi(T)(\xi_n \otimes g_n)\| \ge n$. Donc on a $\|\pi(T)\| = +\infty$.

(5) On a $(G(T) \otimes_\pi H) \otimes_{\pi'} K \simeq G(T) \otimes_{\pi' \circ \pi} (H \otimes_{\pi'} K)$ par composition des modules hilbertiens. ■

Remarques : 1. Pour un opérateur T densément défini fermé, il est faux en général que le module $G(T) \otimes_\pi G$ soit un graphe. Soient $A = C([0,1])$, $E = A$, $F = C_0(]0,1])$ et $S \in \mathbf{L}(E,F)$ l'opérateur injectif d'image dense défini par $(S\xi)(t) = t\xi(t)$, pour tout $\xi \in F$, pour tout $t \in [0,1]$. Soient $T = S^{-1}$ et $\pi : A \to \mathbb{C}$ l'évaluation en 0. Alors l'opérateur T est densément défini fermé mais on a $G(T) \otimes_\pi G = 0 \oplus \mathbb{C}$ n'est pas le graphe d'un opérateur de $F \otimes_\pi \mathbb{C}$ dans $E \otimes_\pi \mathbb{C}$.

2. Sous les hypothèses du lemme, on a $\pi(T^*) \subset (\pi(T))^*$. En général, il n'y a pas égalité. Soit T l'opérateur de l'exemple de la section I.2, soit $\pi : C([-1,1]) \to \mathbb{C}$ l'évaluation en 0. Alors on a $\pi(T^*) = \pi(T) = T_0 \neq T_0^* = (\pi(T))^*$. En fait, c'est l'obstruction pour être un opérateur régulier, comme nous allons maintenant le montrer.

Dans la proposition et le corollaire qui suivent, pour tout $\pi \in \hat{A}$ (cf [5] p.60), on désigne par H_π l'espace d'une représentation irréductible unitaire fixée de A de classe π.

Proposition 1.16. *Soit A une C^*-algèbre. Soient E et F deux A-modules hilbertiens avec $E \subset F$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $E = F$

(ii) $\mathbf{K}(E, F) = \mathbf{K}(F)$

(iii) *Pour toute représentation irréductible* $\pi : A \to \mathbf{L}(\mathbb{H}_\pi)$, *on a* $E \otimes_\pi H_\pi = F \otimes_\pi H_\pi$.

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (iii) est trivial. Montrons (iii) $\Rightarrow$ (ii). Supposons par l'absurde que (iii) est vérifiée et que $\mathbf{K}(E, F) \neq \mathbf{K}(F)$. Alors l'idéal $I = \mathbf{K}(E, F)$ est un idéal à droite fermé strict de $\mathbf{K}(F)$. D'après [Pe, 3.13.5], il existe un état pur ϕ de $\mathbf{K}(F)$ tel que pour tout $x \in I$, on a $\phi(xx^*) = 0$. Soit (π_ϕ, H_ϕ) la représentation GNS de ϕ, soit ξ_ϕ le vecteur unitaire associé et soit $\pi : A \to \mathbf{L}(\mathbb{H}_\pi)$ la (classe de) représentation irréductible de A telle que, à isomorphisme près, la représentation π est isomorphe à $id \otimes_\pi 1$. Comme on a $E \otimes_\pi H_\pi = F \otimes_\pi H_\pi$, la restriction à I de la représentation π_ϕ est une représentation non dégénérée. Soit $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une unité approchée bornée positive de I de norme inférieure ou égale à 1. Comme $\mathbf{K}(E)$ agit de façon non dégénérée sur $E \otimes_\pi H_\pi = F \otimes_\pi H_\pi$, le filtre $(\pi(u_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ converge fortement vers 1 et donc le filtre $(\langle \xi_\phi, \pi_\phi(u_\lambda)(\xi_\phi) \rangle)_{\lambda \in \Lambda}$ converge vers 1. Mais pour tout $\lambda \in \Lambda$, on a $\langle \xi_\phi, \pi(u_\lambda)(\xi_\phi) \rangle = \phi(u_\lambda) = 0$. D'où contradiction. Enfin, (ii) $\Rightarrow$ (i) puisque si (ii) est vérifiée, on a $\mathbf{K}(F, E) = \mathbf{K}(E, F)^* = \mathbf{K}(F)$ et $F \subset \mathbf{K}(F)(F) = \mathbf{K}(F, E)(F) \subset E$. ∎

Corollaire 1.17. *Soit A une C^*-algèbre. Soient E, F, G trois A-modules hilbertiens avec $E \subset G$ et $F \subset G$. Alors on a $E = F$ si et seulement si on a $E \otimes_\pi H_\pi = F \otimes_\pi H_\pi$ pour toute représentation irréductible $\pi : A \to \mathbf{L}(\mathbb{H}_\pi)$.*

Démonstration. Soit $H = \overline{E + F}$. Alors on a $E = F$ si et seulement si $E = H$ et $F = H$, et pour toute représentation irréductible $\pi : A \to \mathbf{L}(\mathbb{H}_\pi)$, on a $E \otimes_\pi H_\pi = F \otimes_\pi H_\pi$ si et seulement si $E \otimes_\pi H_\pi = H \otimes_\pi H_\pi$ et $F \otimes_\pi H_\pi = H \otimes_\pi H_\pi$. Il suffit alors d'appliquer la proposition précédente. ∎

Théorème 1.18. *Soit A une C^*-algèbre. Soient E et F deux A-modules hilbertiens.*

(1) *Soient $T_1 \subset T_2$ deux opérateurs fermés de E dans F densément définis ainsi que leurs adjoints. Alors on a $T_1 = T_2$ si et seulement si on a $\pi(T_1) = \pi(T_2)$, pour toute représentation irréductible $\pi : A \to \mathbf{L}(\mathbb{H}_\pi)$.*

(2) *Soit T un opérateur fermé densément défini de E dans F. Soit $T^\sharp$ un opérateur fermé densément défini inclus dans T^*. Alors l'opérateur T est régulier si et seulement si on a $\pi(T^*) = (\pi(T))^*$, pour tout $\pi \in \hat{A}$, et on a $T^* = T^\sharp$ si et seulement si on a $\pi\left(T^\sharp\right) = \pi(T^*)$, pour toute représentation irréductible $\pi : A \to \mathbf{L}(\mathbb{H}_\pi)$*

Démonstration. (1) On a $T_1 = T_2$ si et seulement si $G(T_1) = G(T_2)$. Il suffit d'appliquer le corollaire 1.17.

(2) Si l'opérateur T est régulier, l'opérateur $\pi(T)$ est régulier d'adjoint $\pi(T^*)$. Considérons la réciproque : soit $T^\sharp \subset T^*$ fermé tel que pour tout $\pi \in \hat{A}$, on a $\pi\left(T^\sharp\right) = \pi(T)^*$. Soit $E_1 = G(T) \oplus U_0\left(G\left(T^\sharp\right)\right) \subset E \oplus F$. Soit $\pi \in \hat{A}$. Alors on a $E_1 \otimes_\pi \mathbb{H}_\pi = G(\pi(T)) \oplus U_0\left(G\left(\pi\left(T^\sharp\right)\right)\right) = (E \oplus E) \otimes_\pi H_\pi$. Donc d'après la proposition 1.16, on a $E_1 = E \oplus E$, ce qui équivaut à dire que l'opérateur T est régulier d'adjoint $T^\sharp$. ■

Exemples d'opérateurs fermés densément définis ainsi que leur adjoint.

Opérateurs définis sur des modules préhilbertiens

Une façon usuelle de construire des modules hilbertiens est de compléter des modules préhilbertiens (voir la proposition qui suit) définis sur des sous-algèbres involutives denses de C^*-algèbres. Les opérateurs partout définis ainsi que leurs adjoints sur ces prémodules préhilbertiens définissent de façon naturelle des exemples comme dans le titre.

Définition 1.19. Etant donnée une C^*-algèbre A sur k, l'algèbre notée $\tilde{A}$ dite unitarisée de A est l'algèbre d'espace vectoriel sous-jacent $A \oplus k$ de structure multiplicative définie par $(a \oplus \lambda)(b \oplus \mu) = (\mu a + \lambda b + ab, \lambda\mu), a, b \in A, \lambda, \mu \in k.$

Définition 1.20. Soient A une C^*-algèbre et $\mathcal{A}$ une sous-algèbre involutive dense de A d'unitarisée $\tilde{\mathcal{A}}$. On appelle $\mathcal{A}-$module préhilbertien la donnée d'un $\tilde{\mathcal{A}}$-module à droite $\mathcal{E}$ muni d'une application $\langle , \rangle : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathcal{A}$ telle que :

- pour tout $\eta \in \mathcal{E}$, l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{A}$ qui à $\xi \in \mathcal{E}$, associe $\langle \eta, \xi \rangle$ est $\tilde{\mathcal{A}}-$linéaire à droite.
- pour tous $\xi, \eta \in \mathcal{E}$, $\langle \xi, \eta \rangle = \langle \eta, \xi \rangle^*$
- pour tout $\xi \in \mathcal{E}$, $\langle \xi, \xi \rangle \in A^+$.

Rappelons (cf proposition 19.5 de [22]) :

Proposition 1.21. *Soit $\mathcal{E}$ un $\mathcal{A}$-module préhilbertien. L'application qui à $\xi \in \mathcal{E}$ associe $\|\langle \xi, \xi \rangle\|^{1/2}$ est une seminorme sur $\mathcal{E}$. Soit E le séparé-complété. L'application $\langle , \rangle$ s'étend par continuité en une application de $E \times E$ dans A, l'action de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{E}$ s'étend par continuité en une action à droite de A sur E ce qui munit E d'une structure de $A-$ module hilbertien.*

On dira que E est le A-module hilbertien associé à $\mathcal{E}$ et on notera $j : \mathcal{E} \to E$ l'application canonique.

Lemme 1.22. *Soient $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ deux $\mathcal{A}$-modules préhilbertiens. Soient E_1 et E_2 les A-modules hilbertiens associés. Soit F un A-B-bimodule hilbertien. Soient $T_1 : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ et $T_2 : \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_1$ des opérateurs tels que $\langle \eta, T_1\xi \rangle = \langle T_2\eta, \xi \rangle$, pour tous $\xi \in \mathcal{E}_1$, $\eta \in \mathcal{E}_2$. Alors les opérateurs T_1 et T_2 sont $\mathcal{A}$-linéaires. Soient G_1 et G_2 l'image de leurs graphes par les applications canoniques de $\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2$ dans $E_1 \oplus E_2$ et de $\mathcal{E}_2 \oplus \mathcal{E}_1$ dans $E_2 \oplus E_1$. Alors les espaces $\overline{G_1} \otimes_\pi F$ et $\overline{G_2} \otimes_\pi F$ sont les graphes de deux opérateurs notés $\pi\left(\overline{T_1}\right)$ et $\pi\left(\overline{T_2}\right)$ fermés densément définis A-linéaires tels que $\pi\left(\overline{T_2}\right) \subset \left(\pi\left(\overline{T_1}\right)\right)^*$.*

Démonstration. On a $\overline{G_1} \perp U_0\left(\overline{G_2}\right)$ et comme la projection orthogonale de G_2 sur E_2 est dense, l'espace $\overline{G_1}$ est un graphe. De même, l'espace $\overline{G(T_2)}$ est un graphe. Si les suites $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont respectivement à valeurs dans $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{A}$, telles que $\lim_{n\in\mathbb{N}}(\xi_n, T_1\xi_n) = \left(\xi, \overline{T_1}(\xi)\right) \in G\left(\overline{T_1}\right)$ et $\lim_{n\in\mathbb{N}} a_n = a \in A$, alors on a $\lim_{n\in\mathbb{N}}(\xi_n a_n, T_1(\xi_n a_n)) = \left(\xi a, \overline{T_1}(\xi)\, a\right) \in G\left(\overline{T_1}\right)$. Donc les opérateurs $\overline{T_1}$ et de même $\overline{T_2}$ sont A-linéaires. Comme on a $\overline{G_1} \perp U_0\left(\overline{G_2}\right)$, on a $\overline{G_1} \otimes_\pi F \perp U_0\left(\overline{G_2}\right) \otimes_\pi F$. D'où l'assertion. ■

Opérateurs associés aux éléments de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie et représentations unitaires

Supposons que l'algèbre $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre involutive dense d'une C^*-algèbre A. D'après la proposition précédente, et d'après le paragraphe précédent, est associé à tout $T \in M(\mathcal{A})$, un opérateur de A dans A fermé densément défini A-linéaire ainsi que son adjoint. Nous le noterons $\overline{T}$.

Soit G un groupe de Lie. Son algèbre de Lie est notée $\mathfrak{g}$, et l'algèbre enveloppante de celle-ci est notée $U(\mathfrak{g})$. Enfin, on note $\sharp$ l'antiautomorphisme canonique de $U(\mathfrak{g})$, qui sur $\mathfrak{g}$ vaut $-id$. Soit $\mathcal{A} = C_c^\infty(G)$ considérée comme sous-algèbre involutive dense de $C^*(G)$ notée A. On note encore $\sharp$ la restriction de l'involution canonique de A à $\mathcal{A}$.

Lemme 1.23. *Soit $X \in U(\mathfrak{g})$. L'application $L_X : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ qui à $f \in \mathcal{A}$ associe $Xf \in \mathcal{A}$ appartient à $\mathcal{L}^*(\mathcal{A})$, et l'application qui à $X \in \mathcal{A}$ associe L_X est un morphisme d'algèbre involutive qui est injectif, quand $dim(G) > 0$.*

Démonstration. Il suffit de le montrer pour $X \in \mathfrak{g}$. Soit $\xi, \eta \in \mathcal{A}$. Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors on a $\xi^\sharp \exp(tX)\,\eta = (\exp(-tX)\,\eta)^\sharp\, \xi$ d'où en différentiant, $\xi^\sharp X\eta = (-X\xi)^\sharp\, \eta$ soit $(L_X)^\sharp = L_{X^\sharp}$. La dernière assertion est aisée. ■

Définition 1.24. Soit B une C^*-algèbre, soit E un B-module hilbertien, soit $\pi : G \to U(E)$ une représentation fortement continue. L'espace de Gärding de E est le sous-espace vectoriel $\pi(\mathcal{A})\, E$ noté $Gar(E)$.

C'est un sous-B-module dense de E.

Lemme 1.25. *Soit $X \in U(\mathfrak{g})$.*

(1) *Le sous-espace $Gar(C^*(G))$ est un domaine essentiel pour $\overline{L_X}$.*

(2) *Soit B une C^*-algèbre, soit E un B-module hilbertien, soit $\pi : G \to U(E)$ une représentation fortement continue ce qui munit E d'une structure de A-B-module hilbertien. Alors il existe une unique représentation $\pi : \mathfrak{g} \to End(Gar(E))$, tel que $\pi(X)(ae) = \pi(X.a)\, e, X \in \mathfrak{g}, a \in \mathcal{A}, e \in E$. L'espace $Gar(E)$ est un domaine essentiel pour $\pi\left(\overline{L_X}\right)$, et on a $\pi\left(\overline{L_X}\right) = \overline{\pi(X)}$.*

Démonstration. (1) C'est par définition.

(2) Cela résulte immédiatement du lemme 1.22. ■

Le théorème suivant est le théorème 2.2 de [16].

Théorème 1.26. *Soit G un groupe de Lie et soit π une représentation unitaire de G. Soit $X \in U(\mathfrak{g})$ elliptique. Alors on a $\overline{\pi(X)^*} = \overline{\pi(X^\sharp)}$.*

Compte tenu du théorème 1.18, on a donc :

Corollaire 1.27. *Soit G un groupe de Lie. Soit $X \in U(\mathfrak{g})$ elliptique. Alors on a $\overline{L_X} \in M^{nb}(C^*(G))$ et $\overline{L_X}^* = \overline{L_{X^\sharp}}$.*

Dans [16], les auteurs ont étudié les propriétés d'autoadjonction de $\overline{\pi(X)}$, où X est un élément autoadjoint de l'algèbre enveloppante et où π est une représentation dans un espace de Hilbert. Comme d'après le lemme précédent, on a $\overline{\pi(X)} = \pi\left(\overline{L_X}\right)$, le théorème 1.18 permet de déduire du fait que $\overline{\pi(X)}$ est autoadjoint pour tout $\pi \in \hat{G}$, que l'opérateur $\overline{L_X}$ est régulier. En particulier, soit G le groupe formé des matrices triangulaires supérieures réelles de dimension 2 de premier coefficient diagonal égal à 1. On peut trouver (cf [16]) un élément $X = X^\sharp \in U(\mathfrak{g})$ et une représentation irréductible unitaire π de G, tel que l'opérateur $\pi(X)$ n'est pas essentiellement autoadjoint. Il s'ensuit que le résultat du corollaire 1.27 ne s'applique pas à un tel élément X.

Dans [20], un résultat plus général que le dernier corollaire (que nous avons énoncé comme corollaire puisque nous l'obtenons ici par une autre méthode via les théorèmes 1.18 et 1.26) énoncé dans le cadre du calcul pseudodifférentiel sur les groupoïdes de Lie, dû à G. Skandalis dans le cas des feuilletages, est démontré. Compte tenu de [11], [14], la démonstration est la même que dans le cas des feuilletages) (voir également [24] pour le cas des feuilletages). Comme le texte [20] n'est pas aisément disponible, nous redonnons en annexe le résultat de [20], avec un résultat complémentaire sur la transformée de Woronowicz d'un G-opérateur pseudodifférentiel elliptique d'ordre strictement positif et son symbôle.

Multiplicateurs de l'idéal de Pedersen et théorèmes à la Dauns-Hofmann et Schur.

Soit A une C^*-algèbre. Suivant [12], on notera $K(A)$ l'idéal de Pedersen de A (qui est un idéal bilatère autoadjoint : cf [18] théorème 5.6.1) et $\Gamma(K(A))$ l'algèbre involutive des multiplicateurs de $K(A)$ (au lieu de $M(K(A))$). Le but de ce paragraphe est d'étudier les éléments de $\Gamma(K(A))$ du point de vue des opérateurs réguliers (voir en particulier le théorème 1.30), ainsi que d'étudier le centre de cette algèbre en établissant des généralisations des théorèmes de Dauns-Hofmann et de Schur dans le cadre des opérateurs non bornés dans les C^*-modules (cf proposition 1.32 et théorème 1.34). Pour tout $T \in \Gamma(K(A))$, rappelons que l'opérateur $\overline{T}$ désigne l'opérateur sur A fermé densément défini d'adjoint densément défini ainsi que son adjoint.

Proposition 1.28. (1) *Soit $T : K(A) \to A$ un opérateur $K(A)-$linéaire. Alors on a $T(K(A)) \subset K(A)$ et l'opérateur T est A-linéaire.*

(2) *Soit $T : K(A) \to A$ un opérateur à adjoint densément défini. Alors on a $\overline{T} \in M^{nb}(A)$.*

Démonstration. (1) Soit $x \in K(A)$. Comme $|x|^{\frac{1}{4}} \in K(A)$ et comme il existe $u \in A$ tel que $x = u|x|^{\frac{1}{2}}$, en posant $v = u|x|^{\frac{1}{4}}$, on a $x = v|x|^{\frac{1}{4}}$ et $T(x) = T(v)|x|^{\frac{1}{4}} \in K(A)$. De plus, soit $a \in A$. Alors on a $T(xa) = T(v)|x|^{\frac{1}{4}}a = T(x)a$. Donc l'opérateur T est A-linéaire.

(2) Notons encore T la fermeture de l'opérateur densément défini T de A dans A. D'après le théorème 1.18, il suffit de montrer que pour toute représentation irréductible π de A dans un espace de Hilbert $\mathbb{H}_\pi$, on a $\pi(T)^* = \pi(T^*)$. Alors pour tout idéal à gauche I de A tel que $\pi(I) \neq 0$, le sous-espace vectoriel noté $\pi(I)\mathbb{H}_\pi$ engendré par les éléments de la forme $\pi(i)h, i \in I, h \in H_\pi$ est un sous-A-module non trivial donc d'après le théorème de Kaplansky (cf [6]) est égal à $\mathbb{H}_\pi$. Donc l'opérateur $\pi(T)$ est un opérateur linéaire partout défini, à adjoint densément défini, donc fermé, donc continu. Comme l'opérateur $\pi(T^*)$ est fermé, densément défini et inclus dans l'opérateur $\pi(T)^*$ donc continu, on a $\pi(T^*) = (\pi(T))^*$. D'où le résultat. ∎

On notera $j : \Gamma(K(A)) \to M^{nb}(A)$ l'application injective qui à $T \in \Gamma(K(A))$ associe $\overline{T} \in M^{nb}(A)$.

Nous utiliserons le théorème suivant qui découle essentiellement de [19], qui en contient la deuxième partie. Son énoncé est plus général et les démonstrations se déduisent de celles de [19]. Nous esquissons les démonstrations pour 1., puisque 2. et sa démonstration sont contenues dans [19] (cf [19] theorem 2 p.862, proposition p.863). On note $K(A)^+ = K(A) \cap A^+$. On désigne par $L_a = \overline{Aa}$ et par $End(L_a)$ l'espace des endomorphismes continus de L_a pour la norme d'opérateur. Notons $\langle , \rangle$ le produit scalaire canonique sur A. Alors l'espace L_a est naturellement muni d'une structure de $\overline{aAa}$-module hilbertien. Soit $B_a = \mathbf{L}_{\overline{aAa}}(L_a)$.

Théorème 1.29. (N. C. Phillips) *Soit $a \in K(A)^+$, soient $L_a = \overline{Aa}$, et $I_a = \overline{L_a L_a^*}$. Alors :*

(1) *On a $L_a \subset K(A)$.*

(2) Soit $T : K(A) \to A$ un opérateur à adjoint densément défini. Alors on a $T(L_a) \subset L_a$.

(3) *Il existe un unique isomorphisme $\psi_a : B_a \to \mathbf{M}(I_a)$ tel qu'on a $\psi_a(T)_{|L_a} = T$, pour tout $T \in B_a$.*

(4) *Soit $T : K(A) \to A$ à adjoint densément défini. Alors l'opérateur T est induit par un élément de $\Gamma(K(A))$ (en particulier, le domaine de son adjoint contient $K(A)$). De plus, l'opérateur $T_{|L_a}$ est borné et appartient à B_a et on a $\psi_a(T_{|L_a}) = T_{|I_a} = \tau_{I_a}(\overline{T})$, où $\tau_{I_a} : A \to \mathbf{M}(I_a)$ est le morphisme canonique.*
On en déduit qu'il existe une unique application

$$\theta : \Gamma(K(A)) \to lim_{\leftarrow, a \in K(A)^+} B_a,$$

où la limite projective est définie selon le filtre naturel de $\mathbf{K}(A)_+$ par les morphismes $B_a \to B_b$ induits par les inclusions $I_b \subset I_a$, pour $0 \leq b \leq a$, où pour tous $T \in \Gamma(K(A))$ et $a \in K(A)^+$, on a $(\theta(T))_a = T_{|I_a}$ et c'est un isomorphisme d'algèbre involutive.

Démonstration. (1) D'après [12] proposition 3.3, on a $L_a \subset K(A)$.

(2) Soit $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une unité approchée de A dans l'idéal à droite dense $\mathrm{dom}(T^*)$. Alors pour tout $b \in L_a$, on a $T(b) = \lim_\Lambda u_\lambda T(b) = \lim_\Lambda (T^*(u_\lambda))^* b$ qui appartient à L_a.

(3) Ceci est démontré dans [19]. Cela découle en fait immédiatement du fait que L_a réalise une équivalence de Morita entre l'algèbre $\overline{aAa}$ et l'idéal I_a, et du fait que l'on a un isomorphisme $\mathbf{M}(I_a) \simeq \mathbf{L}_{I_a}(I_a)$.

(4) Aisé avec 2. car $T_{|L_a}$ est continu. ∎

Théorème 1.30. *Soit T un opérateur sur A fermé densément défini ainsi que son adjoint. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) $T \in j\left(\Gamma\left(K\left(A\right)\right)\right)$*;*

(2) $\mathrm{dom}\left(T\right)$ *contient un idéal bilatère dense de* A*;*

(3) $\mathrm{dom}\left(T^{*}\right)$ *contient un idéal bilatère dense de* A*;*

(4) *Pour toute partie quasicompacte C de* $\mathrm{Prim}\left(A\right)$, *on a* $\sup_{\pi\in C}\left\|\pi\left(T\right)\right\| < +\infty$.

De plus, dans ces conditions, l'espace $K\left(A\right)$ est un domaine essentiel pour T.

Démonstration. L'équivalence des trois premières assertions (1), (2), (3) résulte par exemple du théorème précédent et de la proposition 1.12. En effet, si la troisième condition du théorème précédent est vérifiée, on a $T^{**} \in M^{nb}\left(A\right)$ et l'espace vectoriel $K\left(A\right) \oplus K\left(A\right)$ est essentiel pour $\begin{pmatrix} o & T^{*} \\ T^{**} & 0 \end{pmatrix}$ puisque stable par le flot associé et donc $K\left(A\right)$ est essentiel pour T^{**} donc inclus dans $\mathrm{dom}\left(T\right)$.

Montrons (3) $\Rightarrow$ (4). Soit $C \subset \mathrm{Prim}\left(A\right)$ une partie quasicompacte. Soit $a \in K\left(A\right)^{+}$ tel que $C \subset \mathrm{Prim}\left(I_a\right)$. D'après le théorème 1.29, on a $\tau_{I_a}\left(T\right) \in \mathbf{M}\left(I_a\right)$. Soit M_a sa norme. Alors, pour tout $\pi \in \mathrm{Prim}\left(I_a\right)$, et a fortiori pour tout $\pi \in C$, on a $\left\|\pi\left(T\right)\right\| = \left\|\overline{\pi_{|I_a}}\left(\tau_{I_a}\left(T\right)\right)\right\| \leq M_a$, d'après le lemme 1.15.

Montrons (4) $\Rightarrow$ (1). Soit $x \in K\left(A\right)^{+}$. Soit C une partie quasicompacte de $\mathrm{Prim}\left(A\right)$ qui contient $\mathrm{Prim}\left(I_x\right)$. Soit $M > 0$ tel que pour tout $\pi \in C$, on a $\left\|\pi\left(T\right)\right\| \leq M$. Alors on a $\left\|\oplus_{\pi\in\widehat{I_x}}\pi\left(T\right)\right\| \leq M$ et comme $\oplus_{\pi\in\widehat{I_x}}\pi$ est injectif sur I_x, il résulte des deux dernières assertions du lemme 1.15, que l'on a $\left\|\pi_{I_x}\left(T\right)\right\| \leq M$. Donc on a $\pi_{I_x}\left(T\right) \in \mathbf{M}\left(I_x\right)$. Notons que l'on a $T_{I_x.(\mathrm{dom}\,T).I_x} \subset \pi_{I_x}\left(T\right)$ qui est borné. Soit $\left(u_\lambda\right)_{\lambda\in\Lambda}$ une unité approchée positive bornée de norme ≤ 1, dans $\mathrm{dom}\left(T\right) \cap \mathrm{dom}\left(T^{*}\right)$ qui est un idéal à droite dense et soit $x \in I_x$. Donc la suite $\left(u_\lambda x u_\lambda, T\left(u_\lambda x u_\lambda\right)\right) \in G\left(T\right)$ est convergente puisque $\pi_{I_x}\left(T\right)$ est borné, et comme T est fermé, on a $x \in \mathrm{dom}\left(T\right)$. Donc l'espace I_x est inclus dans $\mathrm{dom}\left(T\right)$ et de même dans $\mathrm{dom}\left(T^{*}\right)$ et comme l'espace vectoriel $K\left(A\right)$ est engendré par son cône positif, l'espace vectoriel $K\left(A\right)$ est inclus dans $\mathrm{dom}\left(T\right) \cap \mathrm{dom}\left(T^{*}\right)$. ■

Soit $\mathrm{Prim}\left(A\right)$ l'espace des idéaux primitifs de A. Via la suite exacte qu'il définit, tout élément π de $\mathrm{Prim}\left(A\right)$ sera considéré également comme un morphisme quotient de A. Rappelons que le théorème de Dauns-Hofmann (cf [18], corollaire 4.4.8 p 108) donne une description de $Z\left(\mathbf{M}\left(A\right)\right)$ (le centre des multiplicateurs de A) pour toute C^{*}-algèbre A.

Théorème 1.31. (dit de Dauns-Hofmann) *Soient A une C^{*}-algèbre et $f \in C_b\left(\mathrm{Prim}\left(A\right)\right)$. Pour tout $a \in A$, il existe un unique élément $T_f\left(a\right) \in A$, tel qu'on a $\pi\left(T_f\left(a\right)\right) = f\left(\pi\right)\pi\left(a\right)$, pour tout $\pi \in \mathrm{Prim}\left(A\right)$. L'application T_f qui à $a \in A$ associe $T_f\left(a\right)$ appartient à $Z\left(\mathbf{M}\left(A\right)\right)$ et l'application qui à $f \in C_b\left(\mathrm{Prim}\left(A\right)\right)$ associe T_f est un isomorphisme de C^{*}-algèbres de $C_b\left(\mathrm{Prim}\left(A\right)\right)$ sur $Z\left(\mathbf{M}\left(A\right)\right)$.*

Notons $C\left(M^{nb}\left(A\right)\right) = \left\{T \in M^{nb}\left(A\right), Q\left(T\right) \in Z\left(\mathbf{M}\left(A\right)\right)\right\}$. La proposition suivante contient un théorème de S. Baaj ([1], chapitre 7), et le théorème 5.42 de [12] et généralise le théorème de Dauns-Hofmann.

Proposition 1.32. *(a) Soit T un opérateur sur A fermé densément défini ainsi que son adjoint. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $T \in j(Z(\Gamma(K(A))))$

2. *Il existe une sous-algèbre involutive $\mathcal{A}$ strictement dense de $\mathbf{M}(A)$, telle qu'on a $aT \subset Ta$, pour tout élément a de $\mathcal{A}$,*

3. *Pour tout $a \in \mathbf{M}(A)$, on a $aT \subset Ta$*

4. $T \in C\left(M^{nb}(A)\right)$

(b) Soit $f \in C(\mathrm{Prim}(A))$. L'ensemble

$$\{(a,b) \in A \oplus A, \quad \pi(b) = f(\pi)\pi(a), \quad \pi \in \mathrm{Prim}(A)\}$$

est le graphe d'un opérateur régulier $T_f \in Z\left(M^{nb}(A)\right)$. L'appli-cation qui à $f \in C(\mathrm{Prim}(A))$ associe $T_f \in Z\left(M^{nb}(A)\right) \simeq Z(\Gamma(K(A)))$ est un isomorphisme d'algèbre involutive.

Démonstration. Montrons (1) $\Rightarrow$ (3). Soit $T \in Z(\Gamma(K(A)))$. Soient $\xi \in \mathrm{dom}\left(\overline{T}\right)$ et $a \in M(A)$. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A telle que l'on a $\lim_{n\to+\infty} a_n\xi = a\xi$ et $a\overline{T}(\xi) = \lim_{n\to+\infty} a_n T(\xi)$ Alors on a $\lim_{n\to+\infty} T(a_n\xi) = a\overline{T}(\xi)$. Donc on a $a\overline{T} \subset \overline{T}a, a \in M(A)$.

Trivialement, (3) $\Rightarrow$ (2).

Montrons (2) $\Rightarrow$ (1). Soit $R \in \Gamma(K(A))$ qui commute avec $K(A) \subset \Gamma(K(A))$. Alors pour tout $a \in K(A)$, pour tout $S \in \Gamma(K(A))$, pour tout $b \in K(A)$, on a $(RS)(a)b = R(S(a)b) = S(a)Rb = S(aRb) = SR(ab) = (SR)(a)b$. Comme l'algèbre $K(A)$ est non dégénérée, on a $SR = RS$ et $R \in Z(\Gamma(K(A)))$. Alors d'après le théorème 1.30, on a $T \in j(\Gamma(K(A)))$ et d'après ce qui précède, $T \in j(Z(\Gamma(K(A))))$.

Montrons (3) $\Rightarrow$ (4). Soit S un opérateur sur A et $a \in A$ tel que $aS \subset Sa$. Soient $\xi \in \mathrm{dom}(S^*)$ et $\eta \in \mathrm{dom}(S)$. On a $(a^*\xi)^* S\eta = \xi^* aS\eta = \xi^* S(a\eta) = (S^*(\xi))^* a\eta = (a^*S^*(\xi))^*\eta$. Donc on a $a^*S^* \subset S^*a^*$.

Soit $a \in A$. On a $aT^*T \subset T^*Ta$. Il en résulte que le sous-A-module à droite $G(1+T^*T)$ est également un sous-A-module à gauche, donc $G\left((1+T^*T)^{-1}\right)$ aussi et donc on a $(1+T^*T)^{-1} a = a(1+T^*T)^{-1}$. D'où $aQ(T) = Q(T)a, a \in A$.

De même, (4) $\Rightarrow$ (3) résulte de l'égalité

$$T = Q(T)\left((1 - Q(T)^* Q(T))^{1/2}\right)^{-1}.$$

Soit alors $f \in C(\mathrm{Prim}(A))$. Il est trivial que l'opérateur T_f est un opérateur fermé, et que son adjoint contient $T_{\overline{f}}$. Soient $g = \left(1+|f|^2\right)^{-1}$ et $T_g \in \mathbf{M}(A)$ défini par le théorème 1.31. Alors l'idéal bilatère fermé $\overline{T_g A}$ est A et on a $\left(1 + T_{\overline{f}}T_f\right) \circ T_g = 1$. Il en résulte directement que l'opérateur T_f est régulier, donc $T_{\overline{f}}$ aussi et $Q(T_f) = T_{fg^{\frac{1}{2}}}$. Donc ces opérateurs sont normaux d'après ce qui précède et donc on a $(T_f)^* = T_{\overline{f}}$. Donc, pour tout $\pi \in \mathrm{Prim}(A)$, on a $\pi(Q(T_f)) = Q(\pi(T_f)) = fg^{1/2}(\pi)$. Donc l'élément $Q(T_f) \in X$ appartient à X où $X = \{f \in C(\mathrm{Prim}(A)), \forall x \in X, \|f(x)\| < 1\}$. Réciproquement, soit $T \in C\left(M^{nb}(A)\right)$. Alors l'élément $Q(T)$ appartient à $C(\mathrm{Prim}(A))$ et pour tout $\pi \in \mathrm{Prim}(A)$, le scalaire par lequel agit $\pi(Q(T)) = Q(\pi(T))$ est de norme < 1. Soit $g \in X$ la fonction définie par $Q(T)$. Alors on a $f = g\left(1-|g|^2\right)^{-1/2} \in C(\mathrm{Prim}(A))$ et $Q(T_f) = T_g$. Donc on a $T = T_f$. ∎

Définition 1.33. Désignons par $C\left(L^{nb}(E)\right)$ l'ensemble des opérateurs réguliers T sur E tels que $Q(T) \in Z(\mathbf{L}(E))$.

Insistons sur le fait que dans l'énoncé du théorème qui suit, l'opérateur T est seulement supposé fermable sans hypothèse concernant son adjoint.

Théorème 1.34. *Soit A une C^*-algèbre, soit E un A-module hilbertien, et soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre fortement dense dans $\mathbf{L}(E)$. Soit T un opérateur sur E densément défini A-linéaire fermable tel que pour tout $a \in \mathcal{A}$, on a $aT \subset Ta$. Alors on a $\overline{T} \in C\left(L^{nb}(E)\right)$. De plus, si $E = A$, alors on a* $\operatorname{dom}(T) = \operatorname{dom}(T^*) = \operatorname{dom}(T)^*$.

Démonstration. Procédons par étapes.

1. Soit $(\xi_n, T\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers $\left(\xi, \overline{T}\xi\right)$ dans $E \oplus E$. Soit $a \in \mathcal{A}$. Alors la suite $(a\xi_n, T(a\xi_n))_{n\in\mathbb{N}} = (a\xi_n, aT\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers $\left(a\xi, a\overline{T}\xi\right)$. Donc on a $a\overline{T} \subset \overline{T}a$ et on peut donc supposer que T est fermé, ce que l'on fait dorénavant.

2. Soit $a \in \mathbf{L}(E)$. Soit $\xi \in \operatorname{dom}(T)$. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ telle qu'on a $\lim_{n\to+\infty}(a_n\xi, a_nT\xi) = (a\xi, aT\xi)$. Alors on a $\lim_{n\to+\infty} Ta_n\xi = \lim_{n\to+\infty} a_nT\xi = aT(\xi)$. Comme T est fermé, on a $aT \subset Ta$.

3. Supposons provisoirement que $E = A$. Soit $x, y \in \operatorname{dom}(T)$. Alors on a $xTy = T(xy) = T(x)y$. Donc on a $\operatorname{dom}(T)^* \subset \operatorname{dom}(T^*)$ et pour tout $x \in \operatorname{dom}(T)$, on a $T^*(x^*) = (T(x))^*$. Ainsi, l'opérateur T^* est densément défini. Comme pour tout $a \in A$, on a $aT \subset Ta$, d'après la proposition 1.32, l'opérateur $T \in C\left(\mathbf{L}^{nb}(E)\right)$. Notons de plus, que comme T est normal, on a $\operatorname{dom}(T) = \operatorname{dom}(T^*)$ qui est donc égal à $(\operatorname{dom}(T))^*$, ce qui démontre également la dernière assertion.

4. Passons au cas général. Comme l'opérateur T est fermé, d'après le lemme 1.13, lui est associé un opérateur $\chi(T)$ sur $\mathbf{K}(E)$ densément défini fermé. Comme par ailleurs pour tout $a \in \mathbf{L}(E)$, on a $aT \subset Ta$, il s'ensuit que pour tout $a \in L(E)$, on a $a\chi(T) \subset \chi(T)a$. D'où d'après ce qui précède, on a $\chi(T) \in Z\left(M^{nb}(\mathbf{K}(E))\right)$. Comme $T = \pi(\chi(T))$ où $\pi : \mathbf{K}(E) \to \mathbf{L}(E)$ est la représentation naturelle, on a $T \in C^{nb}(E)$ et comme on a $Q(T) = \pi(Q(\chi(T))) = Q(\chi(T)) \in Z(\mathbf{L}(E))$, on a $T \in Z\left(C^{nb}(E)\right)$. ∎

Remarques : (1) Soit G un groupe localement compact, soit $\mathbb{C}(G)$ l'algèbre du groupe discret associé, et soit $\mathbb{H}$ un espace de Hilbert. Soit π une représentation de G dans $GL(\mathbb{H})$ irréductible (au sens où $\pi(\mathbb{C}(G))$ est une sous-algèbre fortement dense de $\mathbf{L}(\mathbb{H})$) et T un opérateur fermable, tel que pour tout $g \in G$, on a $gT \subset Tg$. En appliquant le résultat précédent à $\pi(\mathbb{C}(G))$, on obtient que T est scalaire, et l'on retrouve la version hilbertienne du lemme de Schur.

(2) Soit G un groupe de Lie connexe, et soit z un élément du centre de l'algèbre enveloppante. Soit Z l'opérateur défini sur $Gar(C^*(G))$ associé. La proposition 1.32 implique que l'application qui à $\pi \in \widehat{C^*(G)}$ associe $\pi\left(\overline{Z}\right) \in \mathbb{C}$ est continue, résultat dû à P. Bernat et J. Dixmier ([2]) et qu'on a $\overline{\pi(Z^\sharp)} = \pi(Z)^*$, pour toute représentation unitaire π de G, résultat dû à I.E. Segal [21].

2. Intégration des représentations de l'algèbre de Lie dans les C^*-modules

Comportement en normes et vecteurs analytiques dans les C^*-modules. Nous clarifions et généralisons certaines parties de lemmes et démon-strations de [15].

Soit E un groupe abélien. Soit $O(E)$ l'ensemble des opérateurs de E dans E et soient $|O(E)|$ le monoïde libre abélien de générateurs les éléments de $O(E)$. Pour tout $X \in O(E)$, on note $|X| \in |O(E)|$ l'élément associé et on munit $|O(E)|$ des uniques structures de produit et de crochet compatibles avec la structure de monoïde et telles que $|X|.|Y| = |XY|$ (resp. $\operatorname{ad}|X|(|Y|) = |[X,Y]|$, avec tous les parenthésages admis) pour tous $X, Y \in O(E)$, où . et ad désignent les structures produit et crochet respectivement. Le contenu du lemme 2.1 de [15] est valable dans ce contexte (cf lemme 2.1) et la démonstration est valable nec varietur. Pour tout $(k,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k \le n$, notons (n,k) l'ensemble des permutations σ de $\{1, ..., n\}$ telles que la permutation σ est strictement croissante sur $[1,k]$ et sur $[k+1,n]$ et, si $k \neq n$, $\sigma \neq id$.

Lemme 2.1. *Soient $X_1, ..., X_n, A$ des opérateurs sur E alors :*

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{\sigma \in (n,k)} \left(\operatorname{ad} X_{\sigma(k)} ... \operatorname{ad} X_{\sigma(1)} A\right) X_{\sigma(n)} ... X_{\sigma(k+1)} \subset X_n ... X_1 A$$

où pour $\sigma \in (n,k)$, on a $\operatorname{ad} X_{\sigma(k)} ... \operatorname{ad} X_{\sigma(1)} A = A$ si $k = 0$ et $X_{\sigma(n)} ... X_{\sigma(k+1)} = 1$ si $k = n$.

Si ces opérateurs possèdent un domaine invariant dense, alors l'inclusion 1 est une égalité.

Concernant la seconde assertion, on a un résultat plus général :

Lemme 2.2. *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre et soient $X_1, ..., X_n, A \in \mathcal{A}$. Alors on a les égalités suivantes :*

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{\sigma \in (n,k)} \left(\operatorname{ad} X_{\sigma(k)} ... \operatorname{ad} X_{\sigma(1)} A\right) X_{\sigma(n)} ... X_{\sigma(k+1)} = X_n ... X_1 A$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{\sigma \in (n,k)} X_{\sigma(k+1)} ... X_{\sigma(n)} \left(\operatorname{ad} X_{\sigma(k)} ... \operatorname{ad} X_{\sigma(1)} A\right) = A X_1 ... X_n$$

où de même pour $\sigma \in (n,k)$, on a $\operatorname{ad} X_{\sigma(k)} ... \operatorname{ad} X_{\sigma(1)} A = A$ si $k = 0$ et $X_{\sigma(n)} ... X_{\sigma(k+1)} = 1$ si $k = n$.

Démonstration. La première égalité se démontre à partir du lemme précédent en faisant opérer $\mathcal{A}$ sur le groupe additif $\tilde{A}$, et la seconde s'en déduit en appliquant la première égalité à $\mathcal{A}^{op}$. ∎

Nombre de résultats de [15] sont valables dans le cadre des espaces de Banach, a fortiori pour les C^*-modules et nous les utiliserons (en particulier [15], théorème 1). Ici, on reprend certains points pour démontrer la régularité de certains opérateurs autoadjoints et les notations de [15] dans ce cadre, concernant les normes (sur les séries formelles en éléments de) $|O(E)|$. Rappelons la définition d'un vecteur analytique pour un opérateur dans un espace de Banach.

Définition 2.3. Soient E et F deux espaces de Banach et soit T un opérateur de E dans F. Pour $\xi \in E \setminus \operatorname{dom}(T)$, on pose $\|T\xi\| = +\infty$. Soit T un opérateur de E dans E. Un vecteur $\xi \in E$ est dit analytique pour T si et seulement si il existe $s > 0$, tel que $\sum_{n=0}^{+\infty} s^n \frac{\|T^n\xi\|}{n!} < +\infty$.

Définition 2.4. On dira qu'un opérateur T de E dans E est isométrique si et seulement si on a $\langle T\xi, T\xi\rangle = \langle \xi, \xi\rangle$, pour tout $\xi \in \operatorname{dom}(T)$.

Lemme 2.5. *Soit A une C^*-algèbre, soit E un A-module hilbertien. Soient $S_1, T_1, ..., S_n, T_n$ des opérateurs sur E tels que pour tout $i = 1, ..., n$, on a $\overline{T_i} \subset S_i^*$. Alors on a $\overline{T_n}....\overline{T_1} \subset (S_1....S_n)^*$.*

Démonstration. Soient $x \in \operatorname{dom}\left(\overline{T_n}...\overline{T_1}\right)$ et $y \in \operatorname{dom}(S_1....S_n)$. Comme $S_n y \in \operatorname{dom}(S_1...S_{n-1})$ et $x \in \operatorname{dom}\left(\overline{T_{n-1}}...\overline{T_1}\right)$. Alors par récurrence sur n, on a : $\langle x, S_1....S_n y\rangle = \langle \overline{T_{n-1}}...\overline{T_1}x, S_n y\rangle = \langle \overline{T_n}...\overline{T_1}x, y\rangle$. ∎

La proposition 1.12 permet de démontrer l'analogue du lemme 5.1 de [15].

Lemme 2.6. *Soit A une C^*-algèbre et soit E un A-module hilbertien. Soit T un opérateur symétrique fermé de E dans E. Alors l'opérateur T est autoadjoint régulier si et seulement si il existe un sous-espace dense de E formé de vecteurs analytiques pour T.*

Démonstration. Supposons que l'opérateur T régulier. Alors pour tout $f \in C_c(\mathbb{R})$, pour tout $\xi \in E$, l'élément $f(T)\xi$ est analytique pour T et l'ensemble de tels éléments de E est dense dans E. Réciproquement, supposons que l'ensemble $\mathcal{D}$ des vecteurs analytiques pour T est dense dans E. Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, soit $\mathcal{D}_t = \{\xi \in \mathcal{D}, \sum_{n=0}^{\infty} t^n \frac{\|T^n\xi\|}{n!} < +\infty\}$. Comme dans le lemme 5.1 de [15], on construit un groupe à un paramètre fortement continu d'opérateurs unitaires de E dans E noté $(U(t))_{t\in\mathbb{R}}$ tel que pour tous $t \in \mathbb{R}^{+*}$, $\xi \in \mathcal{D}_t$ on a $U(t)(\xi) = \sum_{n=0}^{+\infty} (it)^n \frac{T^n\xi}{n!}$ et tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $U(t)(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$. En effet, la formule précédente définit un opérateur densément défini de $\mathcal{D}_t$ dans E.

(1) Par sommabilité, pour tous $(t_1, t_2, t) \in \mathbb{R}^3$, tels que $|t_1| + |t_2| < |t|$, pour tout $\xi \in \mathcal{D}_t$, on a $U(t_2)(\xi) \in \mathcal{D}_{t_1}$ et enfin $U(t_1)U(t_2)\xi = U(t_1 + t_2)\xi$

(2) Par sommabilité, pour tous $\xi, \eta \in \mathcal{D}_t$, on a $\langle \eta, U(t)\xi\rangle = \langle U(-t)\eta, \xi\rangle$

(3) Pour tout $(t, t') \in \mathbb{R}^2$, pour tout $\xi \in \mathcal{D}_t$, tels que $|t'| \le |t|/2$, pour tout $\xi \in \mathcal{D}_t$, on a $\langle U(t')\xi, U(t')\xi\rangle = \langle \xi, \xi\rangle$

Il découle immédiatement des propriétés élémentaires des séries formelles que pour tout $(t, s) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$, tels que $|s| < t$, pour tout $\xi \in \mathcal{D}_t$, on a $T\xi \in \mathcal{D}_s$, et $U(s)(\xi) \in \operatorname{dom}(T)$, et enfin $TU(s)\xi = U(s)T\xi$, d'où par récurrence $T^k\xi \in \mathcal{D}_s$, et donc $U(s)\left(T^k\xi\right) = T^k\left(U(s)\xi\right)$. Or on a $\sum_{k=0}^{+\infty} t^k \frac{\|T^k U(s)\xi\|}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k \frac{\|U(s)T^k\xi\|}{k!}$ $= \sum_{k=0}^{+\infty} t^k \frac{\|T^k\xi\|}{k!}$ d'où :

(4) Pour tous $(t,s) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$, tels que $|s| < t$, on a $U(s)\xi \in \mathcal{D}_t$

(5) Pour tous $t \in \mathbb{R}^{+*}$, $\xi \in \mathcal{D}_t$, $(t_1,t_2) \in \mathbb{R}^2$, tels que $|t_1| < t, |t_2| < t$, pour tous $n,m \in \mathbb{N}^2$ tels que $nt_1 = mt_2$, on obtient $U(t_1)^n \xi = U(t_2)^m \xi$, en appliquant (1) à t_1/m, et à t_2/n respectivement m et n fois respectivement et l'associativité. Ceci permet de définir pour tout $s > 0$, un opérateur $U(s) : \mathcal{D} \to \mathcal{D} \subset E$ isométrique, en posant $U(s)(\xi) = U\left(\frac{s}{n}\right)^n(\xi)$ pour tous $t \in \mathbb{R}^{+*}$, $\xi \in \mathcal{D}_t$, où $n = E\left(\frac{s}{t}+2\right)$.

Soient $(t_1,t_2,t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{+*}$, et $n \in \mathbb{N}$, tels que on a $|\frac{t_1}{n}| + |\frac{t_2}{n}| < |t|$. D'après (4), on a $U\left(\frac{t_i}{n}\right)(\mathcal{D}_t) \subset \mathcal{D}_t, i = 1,2$ et d'après (1) dans $End(\mathcal{D}_t)$, on a $U\left(\frac{t_1}{n}\right)U\left(\frac{t_2}{n}\right)_{|\mathcal{D}_t} = U\left(\frac{t_2}{n}\right)U\left(\frac{t_1}{n}\right)_{|\mathcal{D}_t} = U\left(\frac{t_1+t_2}{n}\right)_{|\mathcal{D}_t}$ et donc on a $U(t_1+t_2)_{|\mathcal{D}_t}$ $= U\left(\frac{t_1+t_2}{n}\right)^n_{|\mathcal{D}_t} = \left(U\left(\frac{t_1}{n}\right)U\left(\frac{t_2}{n}\right)\right)^n_{|\mathcal{D}_t} = U(t_1)U(t_2)_{|\mathcal{D}_t}$ d'où $U(t_1+t_2) =$ $U(t_1)U(t_2)$.

Par continuité, ceci définit un groupe à un paramètre d'opérateurs unitaires de E dans E qui est fortement continu sur le sous-espace vectoriel dense $\mathcal{D}$ de E donc sur E. Soit T' l'opérateur régulier autoadjoint associé à ce groupe à un paramètre par le théorème 1.11. Comme pour tout $\xi \in \mathcal{D}$, on a $\frac{d}{dt}\left(U(t)(\xi)\right)$ $= T(\xi)$, on a $T'_{|\mathcal{D}} \subset T$. De plus, comme pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $U(t)(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$, la proposition 1.12 implique que le sous-espace $\mathcal{D}$ est essentiel pour T'. Comme T est fermé, il s'ensuit que $T' \subset T$, donc $T \subset T^* \subset (T')^* = T'$, d'où $T' = T$. ■

Lemme 2.7. *Soit A une C^*-algèbre, soient E_1 et E_2 deux A-modules hilbertiens et $T \in \mathbf{L}(E_1,E_2)$. Soient $\mathcal{E}_1 \subset E_1$ et $\mathcal{E}_2 \subset E_2$ deux sous-espaces denses de E_1 et de E_2 respectivement tels que $T(\mathcal{E}_1) \subset \mathcal{E}_2$. Soient $T_1 : \mathcal{E}_1 \to E_1$ et $T_2 : \mathcal{E}_2 \to E_2$ deux opérateurs symétriques essentiellement autoadjoints tels que $TT_1 \subset T_2T$. Supposons de plus soit que l'opérateur $\overline{T_2}$ est régulier et T est bijectif, soit que $\overline{T_1}$ et $\overline{T_2}$ sont réguliers. Alors l'opérateur $\overline{T_1}$ est régulier pour tout $t \in \mathbb{R}$,* on a $\exp\left(it\overline{T_2}\right)T = T\exp\left(it\overline{T_1}\right)$.

Démonstration. Soient $\eta \in \mathrm{dom}(T_1)$ et $\xi \in \mathrm{dom}\left(\overline{T_2}\right)$. Alors on a $\langle T^*\xi, T_1\eta\rangle$ $= \langle \xi, TT_1\eta\rangle = \langle \xi, T_2T\eta\rangle = \langle \overline{T_2}\xi, T\eta\rangle = \langle T^*\overline{T_2}\xi, \eta\rangle$. Donc l'élément $T^*\xi$ appartient à $\mathrm{dom}(T_1^*) = \mathrm{dom}\left(\overline{T_1}\right)$ et on a $\overline{T_1}T^*\xi = T_1^*T^*\xi = T^*\overline{T_2}\xi$. Donc on a $T^*\overline{T_2}$ $\subset \overline{T_1}T^*$, donc par récurrence $T^*\overline{T_2}^n \subset \overline{T_1}^n T^*$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $\mathcal{D}_2^t = \{\xi \in E_2, \exists t \in \mathbb{R}, \sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{n!}\|\overline{T_2}^n\xi\| < +\infty\}$. Alors pour tout $\xi \in \mathcal{D}_2^t$, on a $\sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{n!}\|\overline{T_1}^n T^*(\xi)\| < \infty$ et $T^*\exp(itT_2)(\xi) = \sum_{n\geq 0} \frac{(it)^n}{n!}\overline{T_1}^n T^*(\xi)$. Si l'opérateur T est bijectif ce qui implique que T^* est bicontinu, l'espace vectoriel $T^*\left(\cup_{t>0}\mathcal{D}_2^t\right)$ est dense dans E_1. Dans tous les cas, il existe un sous-espace dense de vecteurs analytiques pour $\overline{T_1}$ qui est donc régulier d'après le lemme 2.6 et on a $T^*\exp\left(it\overline{T_2}\right) = \exp\left(it\overline{T_1}\right)T^*$ et le résultat en découle en prenant l'adjoint. ■

Contrôle analytique et commutateurs.

Soit E un espace de Banach. Rappelons également (cf [15]) la définition du contrôle analytique ("analytic domination" dans [15]).

Définition 2.8. Soient α et $\xi \in |O(E)|$. On dit que α domine analytiquement (ou contrôle les crochets de) ξ si et seulement si il existe $c, c_n \in \mathbb{R}^{+*}, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $\xi \leq c\alpha$, $(\operatorname{ad}\xi)^n \alpha \leq c_n\alpha$, et tels que la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{n!} s^n$ est de rayon de convergence strictement positif.

Dans tous les énoncés de ce paragraphe, on désigne par A une C^*-algèbre et par E un A-module hilbertien. On a d'abord un résultat analogue au lemme 5.2 de [15].

Lemme 2.9. (1) *Soient $X_1, \ldots, X_d, T$ des opérateurs symétriques définis sur un domaine commun invariant dense $\mathcal{D}$ tels que $\overline{T} = T^*$. Soient $\xi = |X_1| + \ldots + |X_d|$ et $\alpha = |T| + |1|$. On suppose que l'on a $\xi \leq c\alpha$, $(\operatorname{ad}\xi)^n \alpha \leq c_n\alpha$, où $c > 0, c_n > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors pour tout $i_1, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, d\}$, on a* $\operatorname{dom}\left(\overline{T}^n\right) \subset \operatorname{dom}\left(\overline{X_{i_1}} \ldots \overline{X_{i_n}}\right)$.

(2) Soit $\tilde{\mathcal{D}} = \cap_{n=1}^{+\infty} \operatorname{dom}\left(\overline{T}^n\right)$ et supposons que $\tilde{\mathcal{D}}$ est essentiel pour $\overline{T}$. Alors les opérateurs $\overline{X_1}, \ldots, \overline{X_d}$ préservent $\tilde{\mathcal{D}}$. Soient $\tilde{X_1}, \ldots, \tilde{X_d}$, $\tilde{T}$ les restrictions à $\tilde{\mathcal{D}}$ des opérateurs $\overline{X_1}, \ldots, \overline{X_d}$, $\overline{T}$, soit $\tilde{\xi} = |\tilde{X_1}| + \ldots + |\tilde{X_d}|$, et $\tilde{\alpha} = |\tilde{T}| + |1|$. Alors on a $\tilde{\xi} \leq c\tilde{\alpha}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\left(\operatorname{ad}\tilde{\xi}\right)^n \tilde{\alpha} \leq c_n\tilde{\alpha}$. Supposons de plus que l'opérateur $\overline{T}$ est régulier. Si l'élément α domine analytiquement ξ, alors les opérateurs $X_1, \ldots, X_d$ sont essentiellement autoadjoints réguliers.

Démonstration. (1) Montrons, comme dans [15], par récurrence que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq k \leq n-1$, $i_1, ..., i_k \in \{1, ..., d\}$, on a $\mathcal{D}\left(\overline{T}^n\right) \subset \mathcal{D}\left(\overline{T}.\overline{X_{i_1}}...\overline{X_{i_k}}\right)$. Notons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, cette hypothèse implique que pour tous $1 \leq k \leq n$, $i_1, ..., i_k \in \{1, ..., d\}$, on a $\mathcal{D}\left(\overline{T}^n\right) \subset \mathcal{D}\left(\overline{X_{i_1}}...\overline{X_{i_k}}\right)$. Supposons l'hypothèse vérifiée pour $n \in \mathbb{N}$. Pour la vérifier pour $n+1$, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathcal{D}\left(\overline{T}^{n+1}\right) \subset \mathcal{D}\left(\overline{T}^n\right)$, il suffit de démontrer que $\mathcal{D}\left(\overline{T}^{n+1}\right) \subset \mathcal{D}\left(\overline{T}.\overline{X_{i_1}}...\overline{X_{i_n}}\right)$, pour tous $1 \leq k \leq n$, $i_1, ..., i_n \in \{1, ..., d\}$. D'après le lemme 2.2 appliquée à $\mathcal{A} = End_A(\mathcal{D})$, on a :

$$\begin{aligned} & X_{i_1}...X_{i_n}T \\ = \;& TX_{i_1}...X_{i_n} - \sum_{k=1}^{n} \sum_{\sigma \in (n,k)} (-1)^k X_{i_{\sigma(k+1)}}...X_{i_{\sigma(n)}} \operatorname{ad} X_{i_{\sigma(k)}} \ldots \operatorname{ad} X_{i_{\sigma(1)}} T \end{aligned}$$

Soit maintenant $x \in \mathcal{D}\left(\overline{T}^{n+1}\right)$, $i_1, ..., i_n \in \{1, ..., d\}$. Montrons que

$$x \in \mathcal{D}\left(\overline{T}.\overline{X_{i_n}}...\overline{X_{i_1}}\right).$$

Comme par récurrence, on a $x \in \operatorname{dom}\left(\overline{X_{i_n}}...\overline{X_{i_1}}\right)$, et comme $\overline{T} = T^*$, il suffit de montrer que l'on a $\overline{X_{i_n}}...\overline{X_{i_1}}(x) \in \operatorname{dom}(T^*)$. Or, pour tout $y \in \mathcal{D}$, on a :

$$\begin{aligned} &\left\langle \overline{X_{i_n}}...\overline{X_{i_1}}(x), Ty \right\rangle = \langle x, X_{i_1}...X_{i_n}Ty \rangle = \langle x, X_{i_1}...X_{i_n}Ty \rangle \\ &= \langle x, TX_{i_1}...X_{i_n}y \rangle - \sum_{k=1}^{n} \sum_{\sigma \in (n,k)} (-1)^k \langle x, X_{i_{\sigma(k+1)}}...X_{i_{\sigma(n)}} \operatorname{ad} X_{i_{\sigma(k)}} ... \operatorname{ad} X_{i_{\sigma(1)}} Ty \rangle \\ &= \langle \overline{T}x, X_{i_1}...X_{i_n}y \rangle - \sum_{k=1}^{n} \sum_{\sigma \in (n,k)} (-1)^k \langle x, X_{i_{\sigma(k+1)}}...X_{i_{\sigma(n)}} \operatorname{ad} X_{i_{\sigma(k)}} ... \operatorname{ad} X_{i_{\sigma(1)}} Ty \rangle \end{aligned}$$

$$= \langle \overline{X_{i_n}}...\overline{X_{i_1}}.\overline{T}x, y\rangle - \sum_{k=1}^{n} \sum_{\sigma\in(n,k)} \langle \overline{\operatorname{ad} X_{i_{\sigma(k)}} .... \operatorname{ad} X_{i_{\sigma(1)}} T}.\overline{X_{i_{\sigma(n)}}}...\overline{X_{i_{\sigma(k+1)}}}x, y\rangle$$

car, par récurrence, on a $\overline{T}(x) \in \mathcal{D}\left(\overline{T}^n\right) \subset \mathcal{D}\left(\overline{X_{i_n}}...\overline{X_{i_1}}\right)$ et $x \in \mathcal{D}\left(\overline{T}^n\right) \subset \cap_{k\geq 1,\sigma\in(n,k)}\mathcal{D}\left(\overline{T}.\overline{X_{i_{\sigma(n)}}}...\overline{X_{i_{\sigma(k+1)}}}\right)$ lui-même inclus dans $\cap_{k\geq 1,\sigma\in(n,k)}\mathcal{D}\left(\overline{\operatorname{ad} X_{i_{\sigma(1)}} .... \operatorname{ad} X_{i_{\sigma(k)}} T}.\overline{X_{i_{\sigma(n)}}}...\overline{X_{i_{\sigma(k+1)}}}\right)$.

(2) D'après la première assertion, les opérateurs $\overline{X_1}, ..., \overline{X_d}$ préserve $\tilde{\mathcal{D}}$. Soit $x \in \tilde{\mathcal{D}}$. Comme l'espace $\tilde{\mathcal{D}}$ est inclus dans dom$\left(\overline{T}\right)$, il existe $(x_j)_{j=1}^n \in \mathcal{D}$ telle qu'on a $\lim_{j\to+\infty} x_j = x$ et $\lim_{j\to+\infty} Tx_j = \overline{T}x$. Alors on a $\sum_{i=1}^d \|\tilde{X}_i x\| = \sum_{i=1}^d lim_{j\to+\infty}\|\tilde{X}_i x_j\| \leq \lim_{j\to+\infty} c\left(\|Tx_j\| + \|x_j\|\right) = c\left(\|Tx\| + \|x\|\right)$, donc on a $\tilde{\xi} \leq c\tilde{\alpha}$. De même, pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a $\|\left(\operatorname{ad}\xi\right)^n \alpha\left(x_j\right)\| \leq c_n\|\alpha\left(x_j\right)\|$. Soit $x \in \mathcal{D}\left(\tilde{\alpha}\right)$. Comme pour tout $i_1, ..., i_n$, l'opérateur $\operatorname{ad}_{X_{i_1}} ... \operatorname{ad}_{X_{i_n}} T$ est fermable, et comme de plus $\|\left(\left(\operatorname{ad}\left(\xi\right)\right)^n \alpha\right)\left(x_j\right) - \left(\left(\operatorname{ad}\left(\xi\right)\right)^n \alpha\right)\left(x_k\right)\| \leq c_n\|\alpha\left(x_j - x_k\right)\|$, on a bien $\left(\operatorname{ad}\left(\tilde{\xi}\right)\right)^n \tilde{\alpha}\left(x\right) = \lim_{j\to+\infty} \left(\operatorname{ad}\left(\tilde{\xi}\right)\right)^n \tilde{\alpha}\left(x_j\right)$ et par conséquent de même $|\left(\operatorname{ad}\left(\tilde{\xi}\right)\right)^n \tilde{\alpha}| \leq c_n|\tilde{\alpha}|$. Il suffit alors d'appliquer le théorème 1 de [15] et le lemme 2.5. ■

Représentations de l'algèbre de Lie et intégrabilité.

Soient A une C^*-algèbre et E un A-module hilbertien. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{R}$ de dimension finie. Une représentation π de $\mathfrak{g}$ dans E sera la donnée d'un sous-A-module dense $\mathcal{D}$ de E appelé domaine de la représentation, et d'un morphisme $\pi : \mathfrak{g} \to End_A\left(\mathcal{D}\right)$, tel que pour tous $\xi, \eta \in \mathcal{D}$, pour tout $X \in \mathfrak{g}$, on a $\langle\xi, \pi\left(X\right)\left(\eta\right)\rangle = -\langle\pi\left(X\right)\left(\xi\right), \eta\rangle$. Les phénomènes de contrôle analytique des éléments de l'algèbre de Lie par le Laplacien se déduisent dans le cadre des C^*-modules très aisément (compte tenu du lemme 1.15) des démonstrations de [15] des résultats analogues dans le cas des espaces de Hilbert et compte tenu des lemmes du paragraphe précédent, les propriétés d'intégrabilité qui en découlent, aussi. Nous nous contenterons donc d'énoncer ces résultats (cf également [17]). Le lemme suivant est l'analogue du lemme 6.2 de [15].

Lemme 2.10. *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle de base $X_1, \ldots, X_d$ et $L = -\sum_{i=1}^d X_i^2 \in U_2\left(\mathfrak{g}\right)$. Soit π une représentation de $\mathfrak{g}$ dans E. Soient $\alpha = |1| + |\pi\left(L\right)|$ et $\xi = \sum_{i=1}^d |\pi\left(X_i\right)|$. Alors il existe $C_d > 0, c > 0$ tels que $\xi \leq C_d\alpha$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\left(\operatorname{ad}\xi\right)^n \tilde{\alpha} \leq c^n\alpha$. En particulier, l'élément α domine analytiquement ξ.*

La démonstration est essentiellement celle du lemme 6.2 de [15] et grâce à ce lemme ainsi qu'au lemme 1.15, on peut choisir la même constante $C_d = \frac{\sqrt{d}}{2}$. Le lemme suivant est l'analogue du lemme 9.1 de [15].

Lemme 2.11. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle de base $X_1, \ldots, X_d$ où $d \in \mathbb{N}$. Soit π une représentation de $\mathfrak{g}$ dans E. Soit $\xi = \sum_{i=1}^d |\pi\left(X_i\right)|$. Soit G le groupe de Lie simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. S'il existe $s > 0$, tel que l'ensemble $\{x \in E, \|e^{\xi s}x\| < +\infty\}$ est dense dans E, alors il existe une unique représentation unitaire fortement continue du groupe G dans E telle que pour tout $X \in \mathfrak{g}$, on a $\frac{d}{dt}\pi\left(\exp\left(tX\right)\right) = \overline{\pi\left(X\right)}$.*

Enfin, le théorème suivant est l'analogue du théorème 5 de [15].

Théorème 2.12. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle de base $X_1, \ldots, X_d$, où $d \in \mathbb{N}$. Soit π une représentation de $\mathfrak{g}$ dans E. Soit $L = -\sum_{i=1}^{d} X_i^2 \in U_2(\mathfrak{g})$ et soit G le groupe de Lie simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Si l'opérateur $\pi(L)$ est essentiellement autoadjoint régulier, alors il existe une unique représentation fortement continue du groupe G dans E telle que pour tout $X \in \mathfrak{g}$, on a $\frac{d}{dt}\pi(\exp(tX)) = \overline{\pi(X)}$.*

$(\mathfrak{g}, K)$-modules hilbertiens.
Dans ce paragraphe, nous généralisons la notion de $(\mathfrak{g}, K)$-module unitaire, au cadre des modules hilbertiens et nous donnons un critère simple d'intégrabilité, dans le cas des groupes de Lie semisimples possédant un sous-groupe compact maximal.

Soient K un groupe compact et $\alpha \in \hat{K}$. On note $p_\alpha \in C(K)$ le projecteur central de $C^*(K)$ associé et $F(K)$ la sous-algèbre $\sum_{(\alpha,\beta)\in\hat{K}^2} p_\alpha C(K) p_\beta$ de $C(K)$. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et $\rho : K \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ un morphisme. Soit B une C^*-algèbre.

Définition 2.13. On appellera $(\mathfrak{g}, K) \overset{\rho}{-} B$-module préhilber-tien (relativement à une sous-algèbre $A(K) \subset C(K)$ contenant $F(K)$) la donnée :

- d'un B-module hilbertien E et d'un sous-domaine dense $\mathcal{E}$ de E appelé domaine de la représentation
- d'une représentation unitaire π de K dans E laissant stable $\mathcal{E}$
- d'une représentation K-équivariante π de $\mathfrak{g}$ dans $\mathcal{E}$, au sens où pour tout $X \in \mathfrak{g}$, pour tout $k \in K$, on a $\pi(\rho(k)(X)) = \pi(k)_{|\mathcal{E}}\, \pi(X)\, \pi(k^{-1})_{|\mathcal{E}}$ et telle que $\pi(f)(\xi) \in \mathcal{E}$, pour tous $f \in A(K)$, $\xi \in \mathcal{E}$.

On notera $\mathcal{E}$ ce $(\mathfrak{g}, K) \overset{\rho}{-} B$-module préhilbertien.

Définition 2.14. Soit K un sous-groupe compact d'un groupe de Lie G et soient $\mathfrak{k}, \mathfrak{g}$ leurs algèbres de Lie respectives. On appelle $(\mathfrak{g}, K)$-B-module préhilbertien relativement à une algèbre $A(K)$ contenant $F(K)$ un $(\mathfrak{g}, K) \overset{Ad}{-} B$-module préhilbertien où $Ad : K \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, est le morphisme obtenu en restreignant la représentation adjointe de G. On dira en outre qu'un $(\mathfrak{g}, K)$-B-module est compatible si on a $\overline{\pi(X)} = \frac{d}{dt}\pi(\exp(tX))$, pour tout $X \in \mathfrak{k}$.

Lemme 2.15. *Soit G un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et soit K un sous-groupe compact de G associé à une involution de Cartan (réelle). Soit B une C^*-algèbre, soit E un B-module hilbertien et soit π une représentation unitaire fortement continue de G dans E. Soit $\mathcal{D}$ l'espace des vecteurs C^∞ pour le groupe G de π. Notons encore π la représentation induite de $\mathfrak{g}$ sur $\mathcal{D}$. Alors la représentation π munit $\mathcal{D}$ d'une structure de $(\mathfrak{g}, K)$-B-module préhilbertien compatible relativement à l'algèbre $A(K) = F(K)$.*

Démonstration. On vérifie trivialement la première assertion.
Comme l'espace $\mathcal{D}$ est stable par $\pi(G)$, il résulte de la proposition 1.12 que l'on a $\overline{\pi(X)} = \frac{d}{dt}\pi(\exp(tX)), X \in \mathfrak{g}$. ■

Lemme 2.16. *Soit E un B-module hilbertien muni d'une représentation unitaire fortement continue π d'un groupe compact K. Soit T un opérateur K-invariant de E dans E et fermable. Alors on a $\pi(f)\overline{T} \subset \overline{T}\pi(f)$, pour tout $f \in C(K)$,*

Démonstration. Comme la fermeture de T est K-invariante, on peut supposer que T est fermé. Soit $\xi \in \operatorname{dom}(T)$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $x_1, \ldots, x_n \in K$, et $\beta_1, \ldots, \beta_n \in [0,1]$ de somme 1, tels que

$$\| (\pi(f)\xi, \pi(f)(T(\xi))) - \sum_{i=1}^{n} \beta_i f(x_i)(\pi(x_i)(\xi), \pi(x_i)(T\xi)) \| \leq \varepsilon.$$

Or, $\sum_{i=1}^{n} \beta_i f(x_i)(\pi(x_i)\xi, \pi(x_i)(T\xi)) \in G(T)$ et donc on a $(\pi(f)(\xi), \pi(f)(T\xi)) \in \overline{G(T)} = G(T)$. ■

Lemme 2.17. *Soit $(E_\alpha)_{\alpha\in A}$ des B-modules hilbertiens et soit E leur C^*-somme. Soit p_α le projecteur associé sur E_α, pour tout $\alpha \in A$, et $\xi_\alpha = p_\alpha \xi$, pour tout $\xi \in E$. Soit T un opérateur symétrique sur E défini sur un domaine dense $\mathcal{D}$ de E. Soit $\mathcal{D}_\alpha = \mathcal{D} \cap E_\alpha$, pour tout $\alpha \in A$. On suppose que l'on a $\xi_\alpha \in \mathcal{D}_\alpha$ pour tout $\xi \in \mathcal{D}$, et que $T(\mathcal{D}_\alpha) \subset E_\alpha$, pour tout $\alpha \in A$. Soit $T_\alpha : \mathcal{D}_\alpha \to E_\alpha$ l'opérateur induit par T. Les assertions suivantes sont alors vérifiées :*

(1) *Pour tout $\alpha \in A$, l'espace $\mathcal{D}_\alpha$ est dense dans E_α.*

(2) *Pour tout $\alpha \in A$, pour tout $\xi \in E$, on a $(T\xi)_\alpha = T(\xi_\alpha)$. De plus, pour tout $\alpha \in A$, on a $p_\alpha T \subset T p_\alpha$ et $p_\alpha \overline{T} \subset \overline{T} p_\alpha$.*

(3) *Pour tout $\alpha \in A$, l'opérateur T_α est symétrique.*

(4) $\overline{\oplus_{\alpha\in A} T_\alpha} = \overline{T}$.

(5) *L'opérateur T est essentiellement autoadjoint régulier si et seulement si pour tout $\alpha \in A$, l'opérateur T_α l'est.*

Démonstration. (1) Par hypothèse, le sous-espace $\mathcal{D}_\alpha$ est l'image par la projection orthogonale sur E_α de $\mathcal{D}$ donc est dense dans E_α.

(2) Soient $\xi \in \mathcal{D}$, $\alpha \in A$. Comme $T(\xi_\alpha) \in E_\alpha$ et comme $\mathcal{D}_\alpha$ est dense dans E_α, pour vérifier que l'on a $(T\xi)_\alpha = T(\xi_\alpha)$, il suffit de voir que l'on a $\langle \eta, T\xi \rangle = \langle \eta, T\xi_\alpha \rangle$, pour tout $\eta \in \mathcal{D}_\alpha$. Alors soit $\eta \in \mathcal{D}_\alpha$. Alors on a $\langle \eta, T\xi \rangle = \langle T\eta, \xi \rangle = \langle T\eta, \xi_\alpha \rangle = \langle \eta, T\xi_\alpha \rangle$, car on a $\xi_\alpha \in \operatorname{dom}(T)$. D'où l'assertion. L'autre assertion est triviale.

(3) C'est trivial.

(4) Cela résulte trivialement du fait que l'on a $p_\alpha \overline{T} \subset \overline{T} p_\alpha, \alpha \in A$.

(5) Soit $\alpha \in A$. D'après (2.17), on a $(p_\alpha \times p_\alpha)(G(T)) = G(T_\alpha)$. Donc on a $p_\alpha \times p_\alpha \left(G\left(\overline{T}\right)\right) = G\left(\overline{T_\alpha}\right)$, comme $G(T_\alpha) \subset G(T)$. Supposons que l'opérateur T est essentiellement autoadjoint régulier, alors on a

$$E_\alpha \oplus E_\alpha = p_\alpha \times p_\alpha \left(G\left(\overline{T}\right) \oplus U_0\left(G\left(\overline{T}\right)\right)\right) = G\left(\overline{T_\alpha}\right) \oplus U_0\left(G\left(\overline{T_\alpha}\right)\right).$$

Donc l'opérateur $\overline{T_\alpha}$ est autoadjoint régulier.

Réciproquement, si pour tout $\alpha \in A$, l'opérateur T_α est essentiellement autoadjoint régulier, alors l'espace $G\left(\overline{T}\right) \oplus U_0\left(G\left(\overline{T}\right)\right)$ contient la somme algébrique des espaces $G\left(\overline{T_\alpha}\right) \oplus U_0\left(G\left(\overline{T_\alpha}\right)\right) = E_\alpha \oplus E_\alpha$ qui est dense dans $E \oplus E$. Donc l'opérateur $\overline{T}$ est autoadjoint régulier. ■

Théorème 2.18. *Soit G un groupe de Lie semisimple simplement connexe et soit K un sous-groupe compact maximal; enfin, soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G. Soit $\mathcal{E}$ un $(\mathfrak{g}, K)$-B-module préhilbertien compatible de représentation structurale π, relativement à une sous-algèbre $A(K) \subset C(K)$ contenant $F(K)$. Soit E le B-module hilbertien sous-jacent. Soient L et C les éléments de $U_2(\mathfrak{g})$ le Laplacien et le Casimir (associés respectivement à la forme de Cartan et à la forme de Killing de G). Alors l'opérateur $\pi(L)$ est essentiellement autoadjoint régulier si et seulement si l'opérateur $\pi(C)$ l'est et dans ce cas, il existe une unique représentation unitaire fortement continue $\pi : G \to U(E)$, telle qu'on a $\overline{\pi(X)} = \frac{d}{dt}\pi(\exp(tX))$, pour tout $X \in \mathfrak{g}$, et dont la restriction au sous-groupe K coïncide avec la représentation structurale de K.*

Démonstration. Soit L_K le Laplacien de K relativement à l'opposée de la forme de Killing de $\mathfrak{g}$. Alors l'opérateur de Casimir vaut $C = L - 2L_K$. D'après le lemme 2.16, pour tout $\alpha \in A$, on a $p_\alpha\overline{\pi(L)} \subset \overline{\pi(L)}p_\alpha$ et $p_\alpha\overline{\pi(C)} \subset \overline{\pi(C)}p_\alpha$. Soit $\alpha \in A$. Si l'opérateur $\overline{\pi(C)}$ est autoadjoint régulier, d'après le lemme 2.17, l'opérateur $\overline{\pi(C)}_\alpha$ est autoadjoint régulier. Or on a $\overline{\pi(C)}_\alpha - \overline{\pi(L)}_\alpha = -2\overline{\pi(L_K)}_\alpha$ qui agit par un scalaire. Donc l'opérateur $\overline{\pi(L)}_\alpha$ est autoadjoint régulier et donc d'après le lemme 2.17, l'opérateur $\overline{\pi(L)}$ est autoadjoint régulier. Pour la réciproque, il suffit d'échanger les rôles de L et de C, dans la démonstration qui précède. Enfin, si l'opérateur $\overline{\pi(L)}$ est autoadjoint régulier, d'après le théorème 2.12, il existe une unique représentation unitaire fortement continue π de G telle qu'on a $\overline{\pi(X)} = \frac{d}{dt}\pi(\exp(tX))$, pour tout $X \in \mathfrak{g}$. ■

Remarque : réciproquement, sous les hypothèses du théorème, soit π une représentation unitaire fortement continue de G dans un module hilbertien E. Alors l'espace vectoriel des vecteurs lisses pour G de π est naturellement d'une structure de $(\mathfrak{g}, K)$-B-module préhilbertien (relativement à $A(K) = F(K)$) est tel que l'opérateur associé au Laplacien est essentiellement autoadjoint régulier. En effet, l'espace des vecteurs analytiques dans π pour le Laplacien $\overline{\pi} \in M^{nb}(C^*(G))$ est un sous-espace essentiel pour l'opérateur $\pi\left(\overline{L}\right)$, d'après la proposition 1.12.

3. Sur la structure des C^*-algèbres des groupes de Lie semisimples complexes simplement connexes

Théorie des représentations unitaires irréductibles et théorie des $(\mathfrak{g}, K)$-modules unitaires irréductibles.

Notations et rappels concernant la théorie des représentations unitaires des groupes de Lie semisimples complexes simplement connexes

Soit G un groupe de Lie semisimple complexe simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ (on désignera par $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ l'algèbre de Lie réelle sous-jacente). Nous allons maintenant donner la classification des représentations irréductibles unitaires de G de D. Zelobenko, donnée à partir des $(\mathfrak{g}_\mathbb{R}, K)$-modules notés simplement $(\mathfrak{g}, K)$-modules dans ce texte. On fixe une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$, un système de racines positifs R^+ de demi-somme σ de l'algèbre de la $\mathbb{C}$-paire $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, une base de Chevalley de $\mathfrak{g}$ définie sur $\mathbb{Q}$ qui munit $\mathfrak{g}$ d'une structure d'algèbre de Lie définie et déployée sur $\mathbb{Q}$, ainsi qu'une involution de Cartan θ adaptée à cette base. Soient $\mathfrak{a}$

la composante réelle de $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{m} = i\mathfrak{a} \subset \mathfrak{h}$. Ceci définit une décomposition d'Iwasawa $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$. On note K, M, A, N les sous-groupes analytiques d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}, \mathfrak{m}, \mathfrak{a}, \mathfrak{n}$ respectivement. Alors le groupe K est compact et on a une décomposition d'Iwasawa $G = KAN$.

On note W_G ou plus simplement W le groupe de Weyl de $\mathfrak{g}$. Enfin, on note $U(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$ et $g \mapsto g^*$ l'unique antiautomorphisme de $U(\mathfrak{g})$ qui, sur $\mathfrak{g}$, vaut moins l'identité.

Soit $\mathcal{P} \subset \mathfrak{a}^*$ le réseau des poids, soit $\mathcal{P}^+$ l'ensemble des poids dominants. Soit $\delta \in \mathcal{P}^+$. On note E^δ la représentation irréductible de K de plus haut poids δ. Soit V une représentation K-finie de K; on note V^δ le $E^\delta - K$-type (on dira également δ-K-type) dans V.

Nous emploierons la terminologie de [26] concernant les $(\mathfrak{g}, K)$-modules. Rappelons qu'un $(\mathfrak{g}, K)$-module unitaire est un $(\mathfrak{g}, K)$-module (cf [26]) dont l'espace vectoriel sous-jacent est muni d'une structure préhilbertienne invariante (on dira que la représentation correspondante de $(\mathfrak{g}, K)$ est unitaire). Un $(\mathfrak{g}, K)$-module unitaire définit un $(\mathfrak{g}, K)$-$\mathbb{C}$-module préhilbertien. Le principe suivant pour classer les représentations irréductibles de G est énoncé dans [8] p.59 : "pour classer à équivalence unitaire près, les représentations unitaires irréductibles de G, il suffit de classer, à équivalence algébrique près les $(\mathfrak{g}, K)$-modules irréductibles unitaires". Soit $\mathcal{E}$ un $(\mathfrak{g}, K)$-module irréductible unitaire. Comme l'opérateur de Casimir agit par un opérateur scalaire d'après le lemme de Schur, il résulte du théorème 2.18, qu'il existe une unique représentation π du groupe G telle que pour tout $X \in \mathfrak{g}$, l'action de X sur $\mathcal{E}$ est la restriction à $\mathcal{E}$ de $\frac{d}{dt}\pi(\exp(tX))$. On montre aisément que la représentation π est irréductible. Réciproquement, le module des vecteurs K-finis d'une représentation irréductible unitaire du groupe G est constitué de vecteurs lisses ce qui le munit d'une structure de $(\mathfrak{g}, K)$-module irréductible unitaire pour le produit scalaire de $L^2(K)$ (cf [26]). Ceci définit une identification fonctorielle entre la catégorie des $(\mathfrak{g}, K)$-modules irréductibles unitaires et celle des représentations unitaires irréductibles.

Soit $\mu \in \mathcal{P}$. Soit I_μ l'espace des fonctions $f : K \to \mathbb{C}$ pour l'action de K à gauche, telles que $f(km) = m^{-\mu} f(k)$, pour tout $k \in K$, pour tout $m \in M$, muni de l'action unitaire de K par translation à gauche et soit V_μ le sous-espace de I_μ des des fonctions continues et K-finies. Soit $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}} = \mathfrak{a}^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. On note $r_{\mu,\lambda}$ la représentation par translation à gauche sur l'espace $V_{\mu,\lambda}$ des fonctions $\varphi : G \to \mathbb{C}$ continues K-finies pour l'action de K par translation à gauche, vérifiant $\varphi(ghn) = h^{-(\mu \oplus (\lambda + 2\sigma))} \varphi(g)$, pour tout $g \in G$, pour tout $h \in MA$, pour tout $n \in N$. L'opération de restriction à K induit un isomorphisme K-invariant noté $\theta_{\mu,\lambda}$ de $V_{\mu,\lambda}$ sur V_μ. Nous ferons l'identification des deux K-représentations sans préciser l'isomorphisme $\theta_{\mu,\lambda}$. De plus, pour tout $X \in \mathfrak{g}$, l'application $\lambda \mapsto \theta_{\mu,\lambda} \circ r_{\mu,\lambda}(X) \circ \theta^{-1}_{\mu,\lambda}$ de $\mathbb{R}$ dans $End(V_\mu)$ est affine.

Soient $\delta \in \mathcal{P}$ et $\mu \in \mathcal{P}$ tels que le K-module V^δ_μ est K-irréductible et non trivial. Notons $U^\delta_{\mu,\lambda} = r_{\mu,\lambda}(U(\mathfrak{g}))\left(V^\delta_\mu\right)$. Alors le sous-$(\mathfrak{g}, K)$-module $U^\delta_{\mu,\lambda}$ possède un unique sous-$(\mathfrak{g}, K)$-module maximal propre $W^\delta_{\mu,\lambda}$; c'est l'union de tous les sous-$(\mathfrak{g}, K)$-modules d'intersection triviale avec le K-module V^δ_μ. On notera $Q^\delta_{\mu,\lambda}$ le $(\mathfrak{g}, K)$ $-$module quotient $V^\delta_{\mu,\lambda}/W^\delta_{\mu,\lambda}$, l'application quotient $q^\delta_{\mu,\lambda} : U^\delta_{\mu,\lambda} \to Q^\delta_{\mu,\lambda}$ et enfin $\hat{r}^\delta_{\mu,\lambda}$ la représentation irréductible dans $Q^\delta_{\mu,\lambda}$.

On notera en particulier $\hat{r}_{\mu,\lambda}$ la représentation $\hat{r}^{\tilde{\mu}}_{\mu,\lambda}$.

Le théorème suivant est dû à D. Zelobenko (cf [28] et [7] p.39) :

Théorème 3.1. (D. Zelobenko) [28]

(1) *Pour tout* $(\mathfrak{g}, K)$*-module irréductible* $\mathcal{E}$*, il existe* $\mu \in \mathcal{P}$*,* $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$*, tels que* $\hat{r}_{\mu,\lambda} \simeq \mathcal{E}$.

(2) *Soient* $\mu, \mu' \in \mathcal{P}$*,* $\lambda, \lambda' \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$*. Alors les représentations* $\hat{r}_{\mu,\lambda}$ *et* $\hat{r}_{\mu',\lambda'}$ *sont isomorphes si et seulement si il existe* $w \in W$ *tel que* $\mu' = w\mu$ *et* $\lambda' = w\lambda$.

(3) *Soit* $\mu \in \mathcal{P}$*. Alors l'ensemble* $\{\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*, \hat{r}_{\mu,\lambda} = r_{\mu,\lambda}\}$ *est un ouvert (c'est même le complémentaire d'une famille finie d'hyperplans).*

Supposons que la représentation $\hat{r}_{\mu,\lambda}^{\delta}$ (resp. $\hat{r}_{\mu,\lambda}$) est unitaire : on notera également $\hat{r}_{\mu,\lambda}^{\delta}$ (resp. $\hat{r}_{\mu,\lambda}$) la représentation unitaire irréductible du groupe G associée.

Séries principales unitaires

Le contenu de ce paragraphe se trouve dans [8] (cf [8] lemme 2 p.61). Nous le rappelons pour la convenance du lecteur en renvoyant à [8] pour les démonstrations.

Soit $\mu \in \mathcal{P}$. Soit $\delta \in \mathcal{P}^+$ tel que le sous-espace V_μ^δ est K-irréductible. Soit $\xi \in V_\mu^\delta$ tel que $\xi \neq 0$ et soit $\langle , \rangle$ une forme sesquilinéaire positive (non nécessairement définie) sur V_μ qui est K-invariante et tel que $\langle \xi, \xi \rangle = 1$. Soit $\lambda \in \mathfrak{a}^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. On définit la forme sesquilinéaire $B_\lambda^{\langle,\rangle}$ sur $U(\mathfrak{g})$ par $B_\lambda^{\langle,\rangle}(u,v) = \langle \xi, r_{\mu,\lambda}(u^*) r_{\mu,\lambda}(v)(\xi) \rangle$, pour tous $u, v \in U(\mathfrak{g})$. Cette forme est évidemment invariante, au sens où $B(u, vw) = B(v^* u, w)$, pour tous $u, v, w \in U(\mathfrak{g})$, ce qui motive sa définition.

Lemme 3.2. [8] (1) *Pour tous* $u, v \in U(\mathfrak{g})$*, l'application qui à* $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ *associe* $B_\lambda^{\langle,\rangle}(u,v)$ *est continue.*

(2) *La forme* $B_\lambda^{\langle,\rangle}$ *est indépendante de* $\langle , \rangle$.

Proposition 3.3. [8] *La forme* $B_\lambda^{\langle,\rangle}$ *est positive si et seulement si le* $(\mathfrak{g}, K)$*-module* $Q_{\mu,\lambda}^{\delta}$ *est unitaire.*

Soit $\delta \in \mathcal{P}$ tel que l'espace vectoriel V_μ^δ est non trivial et irréductible en tant que $\mathfrak{k}-$module. On notera U_μ^δ l'ensemble des $\lambda \in \mathfrak{a}^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ tels que la représentation $\hat{r}_{\mu,\lambda}^{\delta}$ est unitaire. On notera simplement $U_\mu = U_\mu^{\tilde{\mu}}$.

Corollaire 3.4. [8] *L'ensemble* U_μ^δ *est un fermé de* $\mathfrak{a}^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

Construction d'une famille de champs continus de représentations.

On conserve les notations du paragraphe 3.. Soit T un sous-espace localement fermé de U_μ^δ.

Soit $U(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante réelle de l'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}$. Soit $U(\mathfrak{g})(T)$ le produit tensoriel au-dessus de $\mathbb{R}$ de l'algèbre enveloppante réelle $U(\mathfrak{g})$ et de la $\mathbb{C}-$algèbre $C_c(T)$ qui est une $\mathbb{C}$-algèbre. C'est le $U(\mathfrak{g})-C_c(T)$-bimodule canonique. D'après le paragraphe précédent, il existe une unique structure de $C_c(T)$-module préhilbertien sur $U(\mathfrak{g})(T)$ définie par une application $C_c(T)$-sesquilinéaire $\langle , \rangle : U(\mathfrak{g})(T) \times U(\mathfrak{g})(T) \to C_c(T)$, telle que $\langle a \odot f_1, b \odot f_2 \rangle (\lambda) = B_\lambda^{\langle,\rangle}(a,b) \overline{f_1}(\lambda) f_2(\lambda)$, pour tous $a, b \in U(\mathfrak{g})$, pour tous $f_1, f_2 \in C_c(T)$, pour tout $\lambda \in T$. On a $\langle a, Xb \rangle = -\langle Xa, b \rangle$, pour tout $X \in \mathfrak{g}$, pour tous

$a, b \in U(\mathfrak{g})(T)$. Soit $E^{\delta}_{\mu,T}$ le séparé-complété de $U(\mathfrak{g})(T)$ pour $\langle , \rangle$, soit $\mathcal{E}^{\delta}_{\mu,T}$ l'image de $U(\mathfrak{g})(T)$ dans $E^{\delta}_{\mu,T}$ par l'application canonique. On dispose ainsi d'une représentation $\pi^{\delta}_{\mu,T}$ de $\mathfrak{g}$ dans $E^{\delta}_{\mu,T}$ de domaine $\mathcal{E}^{\delta}_{\mu,T}$.

Proposition 3.5. (1) *Il existe une unique représentation $\pi^{\delta}_{\mu,T}$ de G dans $U\left(E^{\delta}_{\mu,T}\right)$, telle que $\frac{d}{dt}\pi^{\delta}_{\mu,T}(\exp(tX)) = \overline{\pi^{\delta}_{\mu,T}(X)}$, pour tout $X \in \mathfrak{g}$.*

(2) *Soient $\lambda \in T$ et $ev_\lambda : C_0(T) \to \mathbb{C}$ le morphisme évaluation en λ. Les représentations unitaires $\hat{r}^{\delta}_{\mu,\lambda}$ et $\pi^{\delta}_{\mu,\{\lambda\}} = \pi^{\delta}_{\mu,T} \otimes_{ev_\lambda} 1$ du groupe G sont équivalentes.*

Démonstration. Soit $\lambda \in T$. Soit $\langle , \rangle_\lambda$ le produit scalaire K-invariant sur $Q^{\delta}_{\mu,\lambda}$ tel que $\langle q(\xi), q(\xi)\rangle_\lambda = 1$. L'application $\theta_\lambda : U(\mathfrak{g}) \to Q^{\delta}_{\mu,\lambda}$ qui à $u \in U(\mathfrak{g})$ associe $\hat{r}^{\delta}_{\mu,\lambda}(u)(q(\xi))$ induit un isomorphisme S_λ de $\mathcal{E}^{\delta}_{\mu,\{\lambda\}}$ sur $Q^{\delta}_{\mu,\lambda}$, ce qui munit $Q^{\delta}_{\mu,\lambda}$ d'une structure de $(\mathfrak{g}, K)$-module unitaire puisque $\lambda \in U^{\delta}_{\mu}$ (cf [8]). Celle-ci est $(\mathfrak{g}, K)$-équivariante. On notera encore S_λ l'opérateur unitaire fermeture de S_λ. Soit L le Laplacien de $\mathfrak{g}$ pour le produit scalaire définie par la forme de Killing et par θ. Alors l'opérateur $\hat{r}^{\delta}_{\mu,\lambda}(L)$ est essentiellement autoadjoint sur $Q^{\delta}_{\mu,\lambda}$ d'après le théorème 2.18, puisque $\hat{r}^{\delta}_{\mu,\lambda}(C)$ l'est et donc l'opérateur $\pi^{\delta}_{\mu,\{\lambda\}}(L)$ l'est également, d'après le lemme 2.7. D'après le théorème 2.18, on a un foncteur contravariant qui à un sous-espace fermé Y de T associe la représentation $\pi^{\delta}_{\mu,Y} : G \to U\left(E^{\delta}_{\mu,Y}\right)$ telle que $\overline{\pi^{\delta}_{\mu,Y}(X)} = \frac{d}{dt}\pi^{\delta}_{\mu,Y}(\exp(tX))$, pour tout pour tout sous-espace fermé Y de T, pour tout $X \in \mathfrak{g}$. Enfin, il résulte encore du lemme 2.7 que l'opérateur unitaire S_λ induit un isomorphisme entre les représentations unitaires $\pi^{\{\delta\}}_{\mu,T} \otimes_{ev_\lambda} 1$ et $\hat{r}^{\delta}_{\mu,\lambda}$. ■

Lemme 3.6. *Pour tout $x \in C^*(G)$, on a $\lim_{\lambda \in U^{\delta}_{\mu}, |\lambda| \to +\infty} \|\pi^{\delta}_{\mu,\{\lambda\}}(x)\| = 0$.*

Démonstration. Notons encore $(,)$ l'extension $\mathbb{C}$-linéaire à $\mathfrak{g}^*_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ de la forme bilinéaire induite par la forme de Killing de l'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}$ sur l'espace dual $\mathfrak{g}^*$. Enfin, on voit $\mathcal{P} \subset \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ comme inclus $\mathfrak{g}^*$. Soit C le Casimir de l'algèbre de Lie semisimple complexe $\mathfrak{g}$. Alors on a $r^{\delta}_{\mu,\lambda}(C) = (\lambda + 2\sigma, \lambda + 2\sigma) - (\lambda + 2\sigma, 2\sigma)$ pour tout $\lambda \in U^{\delta}_{\mu}$. Pour tout $\lambda \in U^{\delta}_{\mu}$, on a $r^{\delta}_{\mu,\lambda}(C) \in \mathbb{R}$, d'où $(\lambda + 2\sigma, \lambda + 2\sigma) = (Re(\lambda) + 2\sigma, Re(\lambda) + 2\sigma) - (Im(\lambda), Im(\lambda))$ et d'après la proposition 8.21 de [23], la partie réelle de λ reste bornée quand $\lambda \in U^{\delta}_{\mu}$.

Donc on a

$$\lim_{|\lambda| \to +\infty, \lambda \in U^{\delta}_{\mu}} |r^{\delta}_{\mu,\lambda}(C)| = +\infty.$$

Or pour démontrer cette formule, il suffit par densité de la démontrer pour tout $x \in C^{\infty}_c(G)$. Soient $x \in C^{\infty}_c(G)$ et $y = Cx \in C^{\infty}_c(G)$. Alors pour tout $\lambda \in U^{\delta}_{\mu}$, on a $\|\pi^{\delta}_{\mu,\{\lambda\}}(x)\| |r^{\delta}_{\mu,\lambda}(C)| \leq \|y\|_{C^*(G)}$. D'où le résultat. ■

Suite de composition de $C^*(G)$.

On note $\langle , \rangle$ le produit scalaire que $(,)$ défini sur $i\mathfrak{m}^*_{\mathbb{R}}$. Soit $(d_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite strictement croissante telle que $\cup_{k \in \mathbb{N}}\{d_k\} = \{\langle \mu, \mu \rangle, \mu \in \mathcal{P}\}$. Soit $\mu \in \mathcal{P}^+$. Notons $p^{\mu} \in C^*(K)$ le projecteur central associé. Soit $k \in \mathbb{N}$. On note I_k l'idéal de $C^*(G)$ engendré par $\{p^{\mu}, \mu \in \mathcal{P}^+, \langle \mu, \mu \rangle \leq d_k\}$. Plus précisément, l'idéal I_k est l'adhérence de

$$\{\sum_{i=1}^{n} a_i p^{\mu_i} b_i,\ a_i, b_i \in C^*(G), \langle \mu_i, \mu_i \rangle \leq d_k\}.$$

On déduit aisément que la suite $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de composition pour $C^*(G)$ du fait que l'action de $C^*(K)$ par multiplication à gauche sur $C^*(G)$ munit l'espace de Banach $C^*(G)$ d'une structure de $C^*(K)$-module banachique non dégénéré.

La loi de réciprocité de Frobenius implique :

Lemme 3.7. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\widehat{I_k} = \{\hat{r}_{\mu,\lambda}, \mu \in \mathcal{P}, \langle \mu, \mu \rangle \leq d_k, \lambda \in U_\mu\}$.*

Démonstration. Notons que l'on a une identification

$$\hat{I}_k \simeq \{\pi \in \hat{G}, inf\{\langle \delta, \delta\rangle, \delta \in \mathcal{P}^+, \pi(p_\delta) \neq 0\} \leq d_k\}.$$

Or, comme par la loi de réciprocité de Frobenius, pour tout $\mu \in \mathcal{P}$, le poids $\tilde{\mu}$ est le plus haut poids de l'unique K-type de $\hat{r}_{\mu,\lambda}$ dont le plus haut poids est de longueur minimal et comme de plus, d'après le théorème 3.1, pour tout $\pi \in \hat{G}$, il existe $\mu \in \mathcal{P}, \lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$, tels que $\pi \simeq \hat{r}_{\mu,\lambda}$, on a $\hat{I}_k = \{\hat{r}_{\mu,\lambda}, \langle \mu, \mu \rangle \leq d_k\}$. ■

Soient $\mu \in \mathcal{P}$ et T un sous-espace localement fermé de U_μ. Soient $E_{\mu,T} = E_{\mu,T}^{\tilde{\mu}}$ (cf paragraphe précédent) et $\pi_{\mu,T} = \pi_{\mu,T}^{\tilde{\mu}}$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $U_k = \{(\mu, \lambda) \in \mathcal{P} \times \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*, \langle \mu, \mu \rangle = d_k, \lambda \in U_\mu\}$. Soient $\pi_k = \oplus_{\mu \in \mathcal{P}, \langle \mu,\mu\rangle = d_k} \pi_{\mu,U_\mu}$ et $S_k = U_k/W$.

Théorème 3.8. *La suite $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de composition de $C^*(G)$ dont tous les sous-quotients sont équivalents au sens de Morita à des C^*-algèbres commutatives.*

Soit $k \in \mathbb{N}$. Le morphisme π_k réalise une équivalence de Morita entre I_k/I_{k-1} et $C_0(S_k)$, et cette équivalence induit un isomorphisme $I_k/I_{k-1} \simeq \mathbf{K} \otimes C_0(S_k)$ si seulement si $k \neq 0$.

Démonstration. Soit $\mu \in \mathcal{P}^+$. Notons p_μ le projecteur minimal (orthogonal) de $C^*(K) = C_r^*(K)$ sur $\mathbb{C}\xi_\mu$ où le vecteur ξ_μ est un vecteur de plus haut poids de V^μ. Soit $\langle , \rangle^\mu$ un produit scalaire K-invariant sur V^μ tel que $\langle \xi_\mu, \xi_\mu \rangle^\mu = 1$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $P_k = \sum_{\mu \in \mathcal{P}^+, \langle \mu,\mu\rangle \leq d_k} p_\mu$. Alors l'idéal I_k est l'idéal bilatère fermé de $C^*(G)$ engendré par P_k. Soit $A_k = P_k C^*(G) P_k$. Soient $E_k = \oplus_{\mu \in \mathcal{P}^+, \langle \mu,\mu\rangle = d_k} E_\mu$ considéré comme $C_0(U_k)$-module hilbertien et $\pi_k = \oplus_{\mu \in \mathcal{P}^+, \langle \mu,\mu\rangle = d_k} \pi_\mu : C^*(G) \to \mathbf{L}(E_k)$. Notons que, par la loi de réciprocité de Frobenius, pour tout $(\mu_0, \lambda_0) \in U_k$, on a $(P_k E_k)_{(\mu_0,\lambda_0)} = P_k E_{\mu_0,\{\lambda_0\}} = p_{\tilde{\mu}_0} E_{\mu_0,\{\lambda_0\}}$ qui est de dimension 1. Soient $\theta_k : \oplus_{\mu \in \mathcal{P}^+, \langle , \rangle = d_k} U(\mathfrak{g}) \odot C_c(U_\mu) \to E_k$ l'application construite au paragraphe ci-dessus associée à la liste $(\xi_\mu)_{\mu \in \mathcal{P}^+, \langle , \rangle = d_k}$ et $\theta'_k : \oplus_{\mu \in \mathcal{P}^+, \langle , \rangle = d_k} C_c(U_\mu) \to P_k E_k$ définie par $\theta'_k(f) = \theta_k\left(\oplus_{\mu \in \mathcal{P}^+, \langle \mu,\mu\rangle = d_k} 1 \odot f_\mu\right)$, pour tout $f = \sum_{\mu \in \mathcal{P}^+, \langle \mu,\mu\rangle = d_k} f_\mu \in \oplus_{\mu \in \mathcal{P}^+, \langle \mu,\mu\rangle = d_k} C_c(U_\mu)$. Alors l'isomorphisme θ'_k induit un isomorphisme de $C_0(U_k) = \oplus_{\mu \in \mathcal{P}^+, \langle \mu,\mu\rangle = d_k} C_0(U_\mu)$ sur $P_k E_k$.

Comme pour tout $x \in C^*(G)$, on a $\lim_{t \in U_k, t \to \infty} \| (\pi_k)_t(x) \| = 0$ d'après le lemme 3.6, il résulte que l'on a un isomorphisme $C_0(U_k) \simeq \mathbf{K}(P_k E_k)$ induit par θ'_k. Modulo cet isomorphisme, d'après le théorème 3.1, on a $\pi_k(P_k I_k P_k) \subset C_0(U_k)^W$. Soit $\zeta_k : C_0(U_k)^W \simeq C_0(S_k)$. Alors on a $\zeta_k(\pi_k(P_k I_k P_k)) = C_0(S_k)$ d'après la version infinie du théorème de Stone-Weierstrass. D'après le lemme 3.7, le morphisme π_k induit un isomorphisme de I_k/I_{k-1} sur $\pi_k(I_k) = \pi_k(A) \pi_k(P_k) \pi_k(A)$ qui est équivalent au sens de Morita à $\pi_k(A_k)$, d'où la première assertion puis

$\pi_k(I_k) \simeq \mathbf{K}(E_k)$. Pour la seconde, il suffit de remarquer d'une part que, comme l'espace topologique S_k est de dimension finie, tout $C_0(S_k)$-module hilbertien dont toutes les fibres sont de dimension séparable infinie est trivial d'après le lemme 10.8.7. de [5], et d'autre part que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, le module hilbertien E_k a toutes ses fibres de dimension infinie séparable si et seulement si $k \neq 0$, puisque les éléments de $\hat{G}$ distincts de la classe de la représentation triviale sont de dimension infinie. ∎

Sur la structure globale de $C^*(G)$.
Notons $q_n = \sum_{\mu \in \mathcal{P}^+, \langle \mu,\mu \rangle \leq d_n} p^\mu$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $\mu \in \mathcal{P}$. Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de U_μ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la représentation r_{μ,λ_n} est irréductible et qui converge vers $\lambda \in U_\mu$. Alors d'après [4]-[13] :

(T) l'ensemble $\lim_{n\to+\infty} \hat{r}_{\mu,\lambda_n} \subset \hat{G}$ est l'ensemble fini des sous-quotients de $r_{\mu,\lambda}$ (qui en particulier sont unitaires), qu'on notera $SQ_{\mu,\lambda}$, et qu'on considèrera comme des parties de $\hat{G}$.

Soit X un sous-espace localement fermé de U_μ. Notons $\hat{r}_{\mu,X}$ la représentation construite ci-dessus, et $C^*(G)_X$ le quotient de $C^*(G)$ isomorphe à

$$\hat{r}_{\mu,X}(C^*(G)),$$

autrement dit celui dont le spectre est l'adhérence dans $\hat{G}$ de $\{\hat{r}_{\mu,\lambda}, \lambda \in X\}$.

Supposons que l'espace X est compact et tel que l'application $\lambda \to \hat{r}_{\mu,\lambda}$ de X dans $\hat{G}$ est injective. Enfin, soient U un ouvert dense de X, tel que pour tout $\lambda \in U$, on a $\hat{r}_{\mu,\lambda} = r_{\mu,\lambda}$, et $\partial X = X \setminus U$. Le lemme suivant est une conséquence directe de [4]-[13].

Lemme 3.9. *Le spectre de $C^*(G)_X$ s'identifie à $\cup_{\lambda\in X} SQ_{\mu,\lambda}$.*

Démonstration. Considérons $r_{\mu,X,U} : \mathbf{L}(E_{\mu,X}) \to \mathbf{L}\left(E_{\mu,X} \otimes_{C_0(X)} C_0(U)\right)$. Alors on a $r_{\mu,U} = r_{\mu,X,U} \circ r_{\mu,X}$, et comme l'ouvert U est dense dans X, le morphisme $r_{\mu,X,U}$ est injectif et donc on a $Ker(r_{\mu,U}) = Ker(r_{\mu,X})$. Donc on a $\widehat{C^*(G)_X} = \overline{X}$ où $\overline{X} = \overline{\{\hat{r}_{\mu,\lambda}, \lambda \in U\}}$. Posons $Y = \cup_{\lambda\in X} SQ_{\mu,\lambda}$. Reste à montrer que $Y = \overline{X}$. D'après [4]-[13], on a $Y \subset \overline{X}$. Soit $\pi \in \overline{X}$. Alors comme $C^*(G)$ est séparable, il existe une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de U telle que $\pi \in \lim_{n\to+\infty} \hat{r}_{\mu,\lambda_n}$. Quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer que la suite converge vers $\lambda \in X$. Alors on a $\pi \in SQ_{\mu,\lambda}$ d'après (T), d'où l'inclusion inverse. ∎

Il résulte de la suite de composition (théorème 3.8) que l'ouvert U s'identifie topologiquement à un ouvert de $C^*(G)_X$, et plus précisément que l'idéal I_U de $C^*(G)_X$ associé à cet ouvert est équivalent au sens de Morita à $C_0(U)$. Par ailleurs, par définition, la C^*-algèbre $C^*(G)_X$ admet une représentation fidèle dans $\mathbf{L}(E_{\mu,X})$ dont la restriction à I_U est un champ continu de représentations fidèles.

Proposition 3.10. *Les deux premières assertions suivantes sont équivalentes et si l'une d'entre elles est vérifiée, alors les trois assertions équivalentes qui suivent le sont :*

(1) *La C^*-algèbre $r_{\mu,X}(C^*(G))$ isomorphe à $C^*(G)_X$ est une sous-$C(X)$-algèbre de $\mathbf{L}(E_{\mu,X})$.*

(2) *Pour tout* $\lambda, \lambda' \in \partial X$, $\lambda \neq \lambda'$, *on a* $SQ_{\mu,\lambda} \cap SQ_{\mu,\lambda'} = \emptyset$.

(3) *La* C^**-algèbre* $C^*(G)_X$ *est un champ continu sur* X.

(4) *Le spectre de la fibre de* $C^*(G)_X$ *en* $\lambda \in X$ *s'identifie à* $SQ_{\mu,\lambda}$.

(5) *La* C^**-algèbre* $C(X)$ *s'identifie à* $C\left(\widehat{C^*(G)_X}\right)$, *donc à* $Z(\mathbf{M}(C^*(G)_X))$.

Démonstration. Supposons d'abord que $r_{\mu,X}(C^*(G))$ est une sous-$C(X)$-algèbre de $\mathbf{L}(E_{\mu,X})$, ce qui munit $C^*(G)_X$ d'une structure de $C(X)$-algèbre. On note $(C^*(G))_\lambda$ la fibre $(C^*(G)_X)_\lambda)$. Soit $\theta : \cup_{\lambda\in X} SQ_{\mu,\lambda} \to \cup_{\lambda\in X}\widehat{(C^*(G))_\lambda}$ (où l'union à droite est l'union de sous-ensemble disjoints de $C^*(G)_X$). Montrons que pour tout $\lambda \in X$, la C^*-algèbre $(C^*(G))_\lambda$ a pour spectre $SQ_{\mu,\lambda}$, ce qui implique (2). Or pour tous $\lambda \in X$, $\pi \in SQ_{\mu,\lambda}$, $x \in C^*(G)_X$ $f \in C(X)$, on a $\pi(fx) = \pi(x) f(\lambda)$. Donc l'ensemble $\theta(SQ_{\mu,\lambda})$ est inclus dans le spectre de $(C^*(G))_\lambda$, et comme θ est bijective, l'application θ induit une bijection entre $SQ_{\mu,\lambda}$ et $C^*(G)_\lambda$. Il en résulte que si (1) est vérifiée, alors (2) et (4) le sont et de plus, que pour tout $x \in C^*(G)_X$ et pour toute suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de U convergeant vers $\lambda \in X$, d'après [4]-[13], on a $\|x\|_\lambda = \lim_{n\to+\infty} \|x\|_{\lambda_n}$. Comme l'ensemble U est dense dans X, l'assertion (3) en résulte.

Montrons que si (2) est vérifiée, alors la C^*-algèbre $C(X)$ s'identifie à $C\left(\widehat{C^*(G)_X}\right)$ ce qui impliquera (1) d'après le théorème de Dauns-Hofmann et achèvera la démonstration, et ceci en déterminant le séparé S du dual de $C^*(G)_X$. Comme l'espace topologique S est compact séparable, il résulte immédiatement de (T) que l'application θ induit un isomorphisme topologique entre X et S. ∎

Montrons maintenant comment déduire, grâce à la proposition précédente, d'informations sur le quotient $C^*(G)/I_U$ noté B_X des informations sur $C^*(G)_X$.

Nous ferons sur le quotient B_X l'hypothèse $\mathcal{H}$ qui suit : on suppose que les hypothèses équivalentes de la proposition précédente sont vérifiées et qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$, des sous-$C(\partial X)$-algèbres $A_1, \ldots, A_k$ de B_X telles que $B_X = \sum_{i=1}^k A_i$ et que, pour tout $i = 1, \ldots, k$, on a un isomorphisme de $C(\partial X)$-algèbre $A_i \simeq \mathbf{K} \otimes C(\partial X)$. Notons que pour tout $i \in [1, k]$, l'algèbre A_i est stable par multiplication à gauche et à droite par p^μ, pour tout $\mu \in \hat{K}$.

Corollaire 3.11. *On suppose que l'hypothèse* $\mathcal{H}$ *est vérifiée. Alors il existe un voisinage compact* F *de* ∂X *dans* X, *et des fibrés hermitiens* $E_1, \ldots, E_k$ *de rang* 1 *sur* $F \setminus \partial X$, *tels que si l'on note* $E = \oplus_{i=1}^k E_i$, *et* $p_i \in End(E)$ *le projecteur orthogonal sur* E_i, *pour* $i = 1, \ldots, k$, *on a une* $C(F)$*-équivalence de Morita entre* $C^*(G)_F$ *et la* $C(F)$*-algèbre* B *formée des fonctions* $f \in End(E)$, *telles qu'il existe* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in C(F)$, *telles que* $\lim_{t\in F, t\to\partial X}\left(f(t) - \sum_{i=1}^k \lambda_k(t) p_i(t)\right) = 0$.

Démonstration. Soient $\overline{X} = X/\partial X$ et $q : X \to \overline{X}$ l'application quotient, et notons $\infty \in \overline{X}$ tel que $\{\infty\} = q(\partial X)$. En considérant $C(\overline{X})$ comme sous-algèbre de $C(X)$, on munit $C^*(G)_X$ d'une structure de $C(\overline{X})$-algèbre telle que $(C^*(G)_X)_\infty = B_X$. Soient $p'_i \in A_i$, $i = 1, .., k$, et $n \in \mathbb{N}$ tels que pour tous $x \in \partial X, i \in [1, k]$ le projecteur $(p'_i)_x$ est un projecteur de rang 1 et tels que $p'_i = q_n p'_i q_n$. La liste de projecteurs orthogonaux $(p'_i)_{i=1}^k$ ([3] lemme

2.10) est telle qu'il existe sur un voisinage F compact de ∞ dans $\overline{X}$ et une liste de projecteurs orthogonaux $(p_i)_{i=1}^k$ de la $C(F)$-algèbre $q_n C^*(G)_F q_n$ qui les relèvent. On se fixe une telle liste et un tel n. Quitte à restreindre F, comme $C^*(G)_X$ est un champ continu sur $\overline{X}$, on peut supposer que les projecteurs p_i sont non nuls en tout point de F. Quitte à restreindre F à nouveau, on peut supposer de plus que $(p'_i)_x$ de rang 1, pour tout $x \in F$, pour tout $i \in I$. En effet, pour toute suite $(x_n)_{n\in F}$, telle que $\lim_{n\in\mathbb{N}} x_n \in \partial\overline{X}$, et pour tout $f \in q_n C^*(G) q_n$, on a $lim_{n\in\mathbb{N}} tr(\pi_{x_n}(f)) = \sum_{\pi\in SQ_{\mu,X}} tr(\pi(x))$ (cf [4]-[13]), cette dernière égalité est vrai pour tout $f \in q_n C^*(G) q_n$, puisque l'opérateur q_n agit par un opérateur de rang fini sur L_μ. Soient $p' = \sum_{i=1}^k p'_i$ et $p = \sum_{i=1}^k p_i$. Alors on a $(C^*(G)_X)_\infty p' (C^*(G)_X)_\infty = (C^*(G)_X)_\infty$ et $C^*(G)_F pC^*(G)_F = C^*(G)_F$. Considérons la $C(F)$-algèbre $B = pC^*(G)_F p$. Soit alors $a \in B$. Soient $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_n \in C(\partial X)$ tels que pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, on a $p'_i a_\infty p'_i = \lambda'_i p'_i$, et $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in C(F)$, qui prolongent $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_k$. Le résultat découle alors immédiatement du fait que $\left(a - \sum_{i=1}^k p_i a p_i\right)_\infty = 0$, et des deux isomorphismes suivants succintement introduites $C_0(F \setminus \partial X)(C^*(G)_F) \simeq \mathbf{K} \otimes C_0(F \setminus \partial X)$, et $C^*(G)_F pC^*(G)_F = C^*(G)$. ■

Remarque : l'hypothèse $\mathcal{H}$ est vérifiée dans les deux cas suivants :

- l'espace ∂X est un singleton d'après [4]-[13].
- Il existe $\rho_1, \ldots, \rho_k \in \hat{K}$, distincts tels que pour tout $i = 1, \ldots, k$, la classe ρ_i intervient avec multiplicité 1 dans $L(\mu)$, et tels que pour tout $x \in \partial X$, on a $|SQ_{\mu,x}| = k$, et dans tout sous-quotient irréductible $Q \in SQ_{\mu,x}$ de $r_{\mu,x}$, il existe un unique $i \in \{1, \ldots, k\}$ tel que la représentation ρ_i intervient dans Q. En fait, les constructions qui précèdent de champs continus associés aux K-types de multiplicité 1, permettent directement de vérifier que l'hypothèse $\mathcal{H}$ est vérifiée et de construire des fibrés E_i triviaux de dimension 1 comme dans le corollaire précédent, convenants au sens de $\mathcal{H}$ sur l'ensemble $F \setminus \partial X$ où $F = X$, qui dans ce cas, se prolongent au bord.

Annexe : opérateurs pseudodifférentiels elliptiques équivariants sur les groupoïdes C^∞.

Dans cet annexe, on désigne par G un groupoïde C^∞ de base G^0 compacte. On fixe un système de Haar dans la classe de Lebesgue (cf [14]); soit $C_c^\infty(G) \subset C_c(G)$ les algèbres involutives associées. Soit $OPD(G)$ la sous-algèbre involutive de $M(C_c^\infty(G))$ des G-opérateurs pseudodifférentiels classiques G-équivariants à droite sur G telle qu'elle est définie dans [14], et si $p \in OPD(G)$ nous noterons encore p l'opérateur densément défini de $C^*(G)$ dans lui-même de domaine $\mathrm{dom}(p)$ égal à $C_c^\infty(G)$; l'adjoint de p dans $M(C_c^\infty(G))$ sera noté $p^\natural$, celui de p au sens des opérateurs étant naturellement noté p^*. On a $p \subset \left(p^\natural\right)^*$. D'après la section 1.4.1, l'opérateur p est fermable de fermeture noté $\overline{p}$ qui est $C^*(G)$-linéaire.

Lemme 3.12. *Soit $p \in OPD(G)$ elliptique d'ordre $m > 0$. Il existe $q, r \in OPD_{-m}(G)$ sont tels que $1 - qp = r$ et pour de tels $q, r \in OPD_{-m}(G)$, on a* $\mathrm{dom}(\overline{p}) = Im(\overline{q}) + Im(\overline{r})$ *et* $\overline{p} = \left(p^\natural\right)^*$.

Démonstration. L'existence de q et de r est esquissée dans [20]. Comme les opérateurs $\overline{q}$ et $\overline{r}$ sont bornés, les opérateurs $\overline{p}.\overline{q}$ et $\overline{p}.\overline{r}$ sont fermés donc on a $\overline{pq} \subset \overline{p}.\overline{q}$ et $\overline{pr} \subset \overline{p}.\overline{r}$. Comme on a $\mathrm{dom}\left(\overline{pq}\right) = \mathrm{dom}\left(\overline{pr}\right) = C^*\left(G\right)$, on a $\mathrm{dom}\left(\overline{p}.\overline{q}\right) = \mathrm{dom}\left(\overline{p}.\overline{r}\right) = C^*\left(G\right)$. Donc on a $Im\left(\overline{q}\right) + Im\left(\overline{r}\right) \subset \mathrm{dom}\left(\overline{p}\right)$. Soit $(u,v) \in G\left(\left(p^\natural\right)^*\right)$. Montrons que l'on a $\overline{q}v = \overline{(1-r)}u$. En effet, soit $x \in C_c^\infty\left(G\right)$, on a :

$$
\begin{aligned}
\langle x, \overline{(1-r)}u - \overline{q}v\rangle &= \langle x, \overline{(1-r)}u\rangle - \langle x, \overline{q}v\rangle \\
&= \langle (1-r)^\natural x, u\rangle - \langle q^\natural x, v\rangle \\
&= \langle (1-r)^\natural x, u\rangle - \langle p^\natural q^\natural x, u\rangle \\
&= \langle 0, u\rangle
\end{aligned}
$$

Comme on a $u = \overline{1-r}\left(u\right) + \overline{r}u = \overline{q}v + \overline{r}u$, on déduit $\mathrm{dom}\left(\left(p^\natural\right)^*\right) \subset Im\left(\overline{q}\right) + Im\left(\overline{r}\right) \subset \mathrm{dom}\left(\overline{p}\right) \subset \mathrm{dom}\left(\left(p^\natural\right)^*\right)$. ■

D'où l'assertion.

Théorème 3.13. *Si l'opérateur p est elliptique, l'opérateur $\overline{p}$ est un opérateur régulier.*

Démonstration. Gardons les notations du lemme précédent.
Soit $T \in Mor\left(C^*\left(G\right) \oplus C^*\left(G\right)\right)$ défini par $T\left(\xi,\eta\right) = \left(\overline{r}\xi + \overline{q}\eta, \overline{p}\left(\overline{r}\xi + \overline{q}\eta\right)\right), \xi, \eta \in E$. Son image est $G\left(\overline{p}\right)$ qui est fermée donc orthocomplémentée, d'après le lemme 23.4 de [22]. ■

Corollaire 3.14. *Si l'opérateur p est elliptique, alors on a $\overline{p^\natural p} = \overline{p^\natural}\overline{p}$.*

Démonstration. En effet on a $\overline{p^\natural} = \left(\overline{p}\right)^*$ et l'opérateur $\overline{p}$ est régulier, on déduit que $\overline{p^\natural}\overline{p} = \left(\overline{p}\right)^*\overline{p}$ est autoadjoint régulier, en particulier fermé donc $\overline{p^\natural p} \subset \overline{p^\natural}\overline{p}$. Par ailleurs, l'opérateur $\overline{p^\natural p}$ est autoadjoint et régulier. Comme les deux opérateurs sont réguliers normaux et comme $\overline{p^\natural p} \subset \overline{p^\natural}\overline{p}$, on déduit $\overline{p^\natural p} = \overline{p^\natural}\overline{p}$. ■

Lemme 3.15. *Soient p et q deux G-opérateurs pseudodifférentiels elliptiques de même ordre $m > 0$ alors* $\mathrm{dom}\left(\overline{p}\right) = \mathrm{dom}\left(\overline{q}\right)$.

Démonstration. Il existe $x, r \in OPD_0\left(G\right)$ tel que $p = xq + r$. Donc on a $\mathrm{dom}\left(\overline{q}\right) \subset \mathrm{dom}\left(\overline{p}\right)$, par symétrie égalité. ■

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $p \in OPD_m\left(G\right)$ elliptique (cf [20]). Soit un tel $p \in OPD_m\left(G\right)$.

Définition 3.16. On note $H^m = \mathrm{dom}\left(\overline{p}\right)$ qui est indépendant du choix de p.

Lemme 3.17. *Soit q un G-opérateur pseudodifférentiel elliptique autoadjoint d'ordre $m > 0$ de symbole principal positif, alors il existe $a > 0$ tel que $Sp\left(\overline{q}\right) \subset [-a, +\infty[$.*

Démonstration. On utilise des G-opérateurs pseudodifférentiels G-équivariants à droite sur G d'ordre demi-entier. On renvoie à [25] pour l'existence d'un opérateur elliptique autoadjoint $q^{'} \in OPD_{\frac{m}{2}}(G)$ tel que $q - q'q' = r$ avec $r \in OPD_0(G)$. On a : $\overline{q} + \|r\| = \overline{q'q'} + (\overline{r} + \|r\|) = \overline{q'}^2 + (\overline{r} + \|r\|)$ (d'après le corollaire précédent) qui est régulier autoadjoint positif. ■

Dorénavant, l'opérateur q aura les propriétés précédentes.

Lemme 3.18. *Soit $f \in C_0(\mathbf{R})$, alors l'opérateur $f(\overline{q})$ appartient à $C^*(G)$.*

Démonstration. Il suffit de le montrer pour $f \in C_c(\mathbb{R})$. Posons $g(x) = (1+x^2)^{-1}$. Soit $f \in C_c(G)$. On a $f(\overline{q}) = \left(\frac{f}{g}\right)(\overline{q})\, g(\overline{q})$. Comme on a $\left(\frac{f}{g}\right)(\overline{q}) \in \mathbf{M}(C^*(G))$, il suffit de prouver que l'on a $g(\overline{q}) \in C^*(G)$. Soit $x \in OPD_{-m}(G)$ tel que $1 - xq$ soit d'ordre $\alpha < 0$. Comme on a $Im\left(\left(1+\overline{q}^2\right)^{-1}\right) \subset \mathrm{dom}(\overline{q})$ et $\overline{x}.\overline{q} \subset \overline{xq}$, on déduit :

$$\begin{aligned}\left(1+\overline{q}^2\right)^{-1} &= \left((1-\overline{xq}) + \overline{xq}\right)\left(1+\overline{q}^2\right)^{-1} \\ &= \overline{1-xq}\left(1+\overline{q}^2\right)^{-1} + \overline{x}Q(\overline{q})\left(1+\overline{q}^2\right)^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

On conclut puisque les opérateurs $\overline{1-xq}$ et $\overline{x}$ sont dans $C^*(G)$.

Puisque le spectre de l'opérateur $\overline{q}$ est borné inférieurement, il existe $f \in C_c(\mathbf{R})$ tel que $Sp(z+f) \subset \mathbb{R}^{+*}$. Posons $b := (z+f)^{-1}(\overline{q})$. ■

Lemme 3.19. *Soit p un G-opérateur pseudodifférentiel elliptique de même ordre m que q. Alors on a $\overline{p}\overline{b} \in \Psi^*(G)$ et $\sigma\left(\overline{p}\overline{b}\right) = \frac{\sigma(p)}{\sigma(q)}$.*

Démonstration. Soit $x \in OPD_0(G)$ tel que le symbôle $\sigma(x)$ vaut $\frac{\sigma(p)}{\sigma(q)}$ et tel que si l'on pose $r = p - xq$, on a $r \in OPD_\alpha(G)$ avec $\alpha \in -\mathbb{N}^*$. Alors on a $\overline{p} = \overline{x}.\overline{q} + \overline{r}$, donc on a $\overline{p}\overline{b} = \overline{x}(z+f)(\overline{q})\overline{b} - \overline{x}f(\overline{q})\overline{b} + \overline{r}\overline{b} = \overline{x} - \overline{x}f(\overline{q})\overline{b} + \overline{r}\overline{b}$. ■

Théorème 3.20. *Soit p un G-opérateur pseudodifférentiel elliptique d'ordre $m > 0$. Alors on a $Q(\overline{p}) \in \Psi^*(G)$ et $\sigma(Q(\overline{p})) = Q(\sigma(p))$.*

Démonstration. Soit q un G-opérateur pseudodifférentiel elliptique autoadjoint d'ordre $m > 0$ de symbôle positif tel que l'opérateur $r = 1 + p^\natural p - q^2$ soit d'ordre $\alpha \in -\mathbb{N}^*$. Soit $f \in C_c(\mathbb{R})$ tel que l'on a $Sp(z+f) \subset \mathbb{R}^{+*}$. On a

$$(1+\overline{p}^*\overline{p})^{-\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{\pi}\int_0^\infty \lambda^{-\frac{1}{2}}(1+\overline{p}^*\overline{p}+\lambda)^{-1}\,d\lambda$$
$$(z+f)^{-1}(\overline{q}) = \left((z+f)^2(\overline{q})\right)^{-\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{\pi}\int_0^\infty \lambda^{-\frac{1}{2}}\left((z+f)^2(\overline{q})+\lambda\right)^{-1}d\lambda$$

Or on a $\mathrm{dom}\left((z+f)^2(\overline{q})+\lambda\right) = \mathrm{dom}(\overline{q}^2) = \mathrm{dom}\left(\overline{q^2}\right) = \mathrm{dom}\left(\overline{p^\natural p}\right) = \mathrm{dom}(1+\overline{p}^*\overline{p}+\lambda)$.

Donc on a $(1+\overline{p}^*\overline{p}+\lambda)^{-1} - \left((z+f)^2(\overline{q})+\lambda\right)^{-1}$
$= -(1+\overline{p}^*\overline{p}+\lambda)^{-1}\left((1+\overline{p}^*\overline{p}+\lambda) - \left((z+f)^2(\overline{q})+\lambda\right)\right)\left((z+f)^2(\overline{q})+\lambda\right)^{-1}$

$= (1+\overline{p}^*\overline{p}+\lambda)^{-1}\left(f^2(\overline{q})+(2zf)(\overline{q})-\overline{r}\right)\left((z+f)^2(\overline{q})+\lambda\right)^{-1}$

Enfin, on a $Im\left((1+\overline{p}^*\overline{p}+\lambda)^{-1}\right)\subset \mathrm{dom}(\overline{p})$ et l'application qui à $\lambda\in\mathbb{R}$ associe $\overline{p}(1+\overline{p}^*\overline{p}+\lambda)^{-1}$ est continue à valeurs dans $\mathbf{M}(C^*(G))$ et prend fait ses valeurs dans $C^*(G)$. Donc on a $Q(p)-\overline{p}(z+f)^{-1}(\overline{q})$
$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \lambda^{-\frac{1}{2}}\left(\overline{p}(1+\overline{p}^*\overline{p}+\lambda)^{-1}\right)\left(f^2(\overline{q})+(2zf)(\overline{q})-\overline{r}\right)\left((z+f)^2(\overline{q})+\lambda\right)^{-1}d\lambda.$

Comme on a $\left\|\left((z+f)^2(\overline{q})+\lambda\right)^{-1}\right\|\leq\lambda^{-1},\ \lambda>0$, l'intégrale est normalement convergente dans $C^*(G)$; il suffit alors d'appliquer le lemme précédent à $\overline{p}\overline{b}$ où $\overline{b}=(z+f)^{-1}(\overline{q})$. ■

References

[1] Baaj, S., "Multiplicateurs non bornés," Thèse de 3ème cycle de Paris VII, 1980.

[2] Bernat, P. et J. Dixmier, *Sur le dual d'un groupe de Lie*, Comptes Rend. Acad. Sc. Paris **250** (1960), 1778-1779.

[3] Blanchard, E., *Déformations de C^*-algèbres de Hopf*, Bull. Soc. Math. France **124** (1996), 141–215.

[4] Delaroche, C., *Extensions des C^*-algèbres*, Bull. Soc. Math. France Mémoire, No. **29**. Supplément au Bull. Soc. Math. France **100** (1972).

[5] Dixmier,J., "Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien," Gauthiers-Villars, Paris, 1957.

[6] —, "Les C^*-algèbres et leurs représentations," Gauthiers-Villars, Paris, 1969.

[7] Duflo, M., *Représentations irréductibles des groupes de Lie semisimples complexes*, in: "Analyse harmonique sur les groupes de Lie, Séminaire Nancy-Strasbourg 1973–1975." Springer-Verlag, Berlin, Lecture Notes in Mathematics **497** (1975), 26–88.

[8] —, *Représentations unitaires irréductibles des groupes simples complexes de rang* 2, Bull. Soc. Math. France **107** (1979), 55–96.

[9] Knapp, A. W., "Representation theory of semisimple Lie groups," Princeton University Press, 1986.

[10] Lance, E. C., "Hilbert C^*-modules: a toolkit for operator algebraists," London Math. Soc. Lect. Notes **210**, 1995.

[11] Lauter, R., B. Monthubert, and V. Nistor, *Pseudodifferential analysis on continuous family groupoids*, Documenta Math. **5** (2000), 625–655.

[12] Lazar, A. J., and D. C. Taylor, "Multipliers of Pedersen's ideal," Memoirs of the Amer. Math. Soc. **169**, 1976.

[13] Milicic, M., *On C^*-algebras with bounded trace*, Glasnik Matematickis **8** (1973), 7–22.

[14] Monthubert, B., and F. Pierrot, *Indice analytique et groupoïdes de Lie*, Comptes Rend. Acad. Sc. Paris **325** Série I (1997), 193–198.

[15] Nelson, E., *Analytic vectors*, Ann. of Math. **70** (1959), 572–615.

[16] Nelson, E., and F. Stinespring, *Representations of elliptic operators in an enveloping algebra*, Amer. J. Math. **81** (1959), 547–557.

[17] Napiorkowski, Na., and S. L. Woronowicz, *Operator theory in the C^*-algebra framework*, Rep. Math. Phys. **31** (1992), 353–371.

[18] Pedersen, G., "C^*-algebras and their automorphism groups," Academic Press, New York, 1979.

[19] Phillips, N. C., *A new approach to the multipliers of Pedersen's ideal*, Proc. Amer. Math. Soc. **104** (1988), 861–867.

[20] Pierrot, F., "Calcul pseudodifférentiel sur les groupoï des de Lie (borné et non borné): rédaction de travaux effectués dans le cadre d'un début de thèse sous la direction de G. Skandalis," Mémoire de magistère à l'ENS Ulm, 1996 (disponible au secrétariat du MMFAI de l'ENS Paris).

[21] Segal, I. E., *A class of operator algebras which are determined by groups*, Duke Math. J. **18** (1951), 221–265.

[22] Skandalis, G., "Cours de 3ème cycle," Paris, VII, 1995.

[23] Salamanca-Riba, S., and D. A. Vogan, Jr., *On the classification of unitary representations of reductive groups*, Annals of Mathematics **148** (1998), 1067–1133.

[24] Vassout, S., "Feuilletages et résidu non commutatif longitudinal," Thèse de doctorat à l'Université Pierre et Marie Curie, 2001.

[25] Vassout, S., *Unbounded pseudodifferential calculus on Lie groupoids*, Prépublication, Jan. 19, 2005:
`http://www.institut.math.jussieu.fr/~vassout/vassout.pdf`.

[26] Wallach, N., "Real reductive groups," Academic Press, New York, 1998.

[27] Woronowicz, S. L., *Unbounded elements affiliated with C^*-algebras and non-compact quantum groups*, Commun. Math. Phys. **136** (1991), 399–432.

[28] Zelobenko, D. P., *Representations of semisimple complex Lie groups* (Russian), Mathematical analysis (Akad. Nauk. SSSR, Moscow) **11** (1973), 51–90.

François Pierrot
Institut de Mathématiques
de Jussieu, 175
rue du Chevaleret
F-75013 Paris
pierrot@math.jussieu.fr

Received August 23, 2005
and in final form March 19, 2006