Journal of Lie Theory
Volume **17** (2007) 317–335

Cohomologie des formes divergences et actions propres d'algèbres de Lie

Abdelhak Abouqateb [1]

Communicated by A. Valette

Résumé. For any action $\tau : \mathcal{G} \to \mathcal{V}(M)$ of a Lie algebra $\mathcal{G}$ on a manifold M, we introduce the notion of a cohomology $H^*_\tau(M)$ which we call the cohomology of τ-divergence forms. We show that this cohomology is invariant by a $\mathcal{G}$-proper homotopy, and that there exists an analogue of the Mayer-Vietoris lemma. We make the connection with the problem of integrability of a Lie algebra action to a proper Lie group action. The differentiable cohomology $H^*_d(G)$ of a unimodular Lie group G is isomorphic to $H^{*+1}_\tau(G/K)$ (where K a compact maximal subgroup of G and $\tau : \mathcal{G} \to \mathcal{V}(G/K)$ is the natural homogeneous action of the Lie algebra $\mathcal{G}$ of G).
Mathematics Subject Classification 2000: 53B05, 57S15, 57S20, 17B56.
Keywords and Phrases: $\mathcal{G}$-manifolds, cohomology, noncompact Lie groups of transformations, compact Lie groups of differentiable transformations.

1. Introduction et résumé

Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie de dimension finie et soit M une variété différentiable. M est dite $\mathcal{G}$*-variété* s'il existe un homomorphisme d'algèbres de Lie $\tau : \mathcal{G} \to \mathcal{V}(M)$ de $\mathcal{G}$ vers l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur M.
Soit M une $\mathcal{G}$-variété quelconque. On désigne par $\Omega^r_c(M)$ l'espace des r-formes à support compact sur M. Le sous-espace de $\Omega^r_c(M)$ engendré par les formes $\mathrm{L}_X\alpha$ avec $\alpha \in \Omega^r_c(M)$ et $X \in \tau(\mathcal{G})$ sera noté : $C^r_\tau(M)$; c'est ce que l'on appellera espace des r*-formes* τ*-divergences*.
L'espace vectoriel gradué : $C^*_\tau(M) := \oplus_r C^r_\tau(M)$, est stable par la différentielle usuelle. La cohomologie du complexe ainsi obtenu, $H^*_\tau(M) := H^*(C^*_\tau(M), d)$, sera appellée la *cohomologie des formes* τ*-divergences*. Evidement, cette cohomologie ne dépend pas seulement de la topologie de M mais aussi de la nature de l'action. Dans cet article nous allons établir quelques règles de calculs de cette cohomologie: traiter des exemples, montrer que la cohomologie des formes divergences est un invariant d'un type d'homotopie qu'on appellera *homotopie* $\mathcal{G}$*-propre*, et que la

[1] L'auteur a bénéficié d'un soutien à la recherche mené dans le cadre du Programme Thématique d'Appui à la Recherche Scientifique PROTARS III.

ISSN 0949–5932 / \$2.50

technique de la suite exacte de Mayer-Vietoris s'applique modulo l'existence d'une partition de l'unité $\mathcal{G}$-invariante (on notera à ce niveau que tout ouvert d'une $\mathcal{G}$-variété est muni d'une action induite par restriction des champs de vecteurs fondamentaux mais qu'il existe des ouverts qui ne sont pas $\mathcal{G}$-invariants au sens de la définition de la section 2.1). En degré 0, nous verrons que $H^0_\tau(M) = 0$ dès qu'il existe une mesure $\mathcal{G}$-invariante sur M.
Si M est compacte, et si la $\mathcal{G}$-action est induite par celle d'un groupe de Lie compact, alors la cohomologie $H^*_\tau(M)$ est nulle en tout degré. Une illustration de ce résultat sera donnée au paragraphe §6. Un autre exemple élémentaire mais aussi important est que lorsque (M, g) est une variété riemannienne compacte alors $H^*_{\mathrm{Kill}_g}(M) = 0$, où Kill_g est l'algèbre de Lie des champs de vecteurs de Killing.
Si G est un groupe de Lie connexe unimodulaire d'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ et K un sous-groupe compact maximal de G, nous montrons l'existence d'un isomorphisme entre la cohomologie différentiable $H^*_d(G)$ du groupe G et la cohomologie $H^{*+1}_\tau(G/K)$; [L'action naturelle $\tau : \mathcal{G} \to \mathcal{V}(G/K)$ étant celle donnée par : $\tau(h)_{\overline{g}} := \frac{d}{dt}_{|t=0}\overline{\exp(-th)g}$]. Il s'agit ici d'une combinaison d'un fameux théorème de Van-Est et du théorème qui suit :
Théorème. (Th. 8.1. §8.) *Soit G un groupe de Lie connexe unimodulaire non compact et K est un sous-groupe compact maximal. Alors on a un isomorphisme d'espaces vectoriels gradués* :

$$\delta : H^r(\Omega^{\mathcal{G}}(G/K)) \overset{\cong}{\to} H^{r+1}_\tau(G/K), \qquad \text{pour } r = 0, \dots, \dim(G/K) - 1$$

donné par :

$$\delta(\omega) := [\omega \wedge d\lambda]$$

où la fonction $\lambda \in C^\infty_c(G/K)$ est telle que $\int_G \lambda(g^{-1}\cdot x)dg = 1$, pour tout $x \in G/K$ (dg étant la mesure de Haar du groupe G).
En particulier $H^1_\tau(G/K)$ est la droite vectorielle engendrée par la classe non nulle $[d\lambda]$ qu'on appelera classe divergence.

Nous nous sommes aussi intéressé à la question d'intégrabilité d'une action d'algèbre de Lie en une action *propre* de groupe de Lie. En effet : depuis le travail de Palais [23], on sait qu'intégrer une action d'algèbre de Lie en une action de groupe de Lie (sans contraintes topologiques) est possible dès que la $\mathcal{G}$-action est faiblement-complète (voir §2 pour les détails). D'un autre côté, les divers travaux entrepris sur les actions propres de groupes de Lie ([6], [18], [20], [17], [21] etc.) nous ont menés à poser la question naturelle suivante: *"Etudier l'intégrabilité d'une action d'algèbre de Lie en une action propre de groupe de Lie?"* ce qui nous semble être d'un grand intérêt pour des questions d'analyse globale ou de la théorie des systèmes dynamiques ([32], [31], [16]).
On dira alors que M est une *$\mathcal{G}$-variété propre* si la $\mathcal{G}$-action τ est l'action infinitésimale d'une action propre de groupe de Lie ; la $\mathcal{G}$-action sera alors appelée une *$\mathcal{G}$-action propre* ou action propre de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$. Du point de vue théorie des feuilletages ([22]), de telles $\mathcal{G}$-actions définissent une classe de *feuilletages singuliers Riemanniens* sur M, la raison en est l'existence de métriques Riemanniennes G-invariantes sur une variété munie d'une action propre de groupes de Lie ([24], Théorème 4.3.1). Nous montrons que les $\mathcal{G}$-actions propres et libres

induisent des feuilletages qui sont à la fois Riemanniens et géodésibles (Proposition 4.1). Pour une $\mathcal{G}$-action propre $\tau\colon\mathcal{G}\to\mathcal{V}(M)$, il existe une métrique Riemannienne sur M telle que les flots des champs de vecteurs $(\tau(h))_{h\in\mathcal{G}}$ soient des isométries de M, mais la réciproque est fausse en générale; des conditions suffisantes à cela nous seront fournies dans le paragraphe §4 par un *critère de $\mathcal{G}$-propreté* (Théorème 4.2).
Pour la classe des $\mathcal{G}$-variétés propres, nous étudierons la cohomologie des formes divergences: Nous montrerons l'existence d'une suite exacte longue de cohomologie reliant la cohomologie des formes divergences et la cohomologie des *formes $\mathcal{G}$-semi-invariantes à support $\mathcal{G}$-compact* (Théorème 5.1).

2. Préliminaires

2.1. Actions d'algèbres de Lie. Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie de dimension finie et soit M une variété différentiable. M est dite une $\mathcal{G}$-variété s'il existe un homomorphisme d'algèbres de Lie $\tau:\mathcal{G}\to\mathcal{V}(M)$ de $\mathcal{G}$ vers l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur M; on dit alors que τ définit une action de $\mathcal{G}$ sur M. Les champs de vecteurs $(X^h(M):=\tau(h))_{h\in\mathcal{G}}$ seront appelés champs de vecteurs fondamentaux de l'action. Notons qu'une action de $\mathcal{G}$ sur M est aussi équivalente à la donnée d'une famille finie $\{X_1,\ldots,X_p\}$ de champs de vecteurs sur M dont les crochets sont données par les constantes de structures C_{ij}^k de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ relativement à une base, soit : $[X_i,X_j]=\sum_{1\le k\le p}C_{ij}^kX_k$.
Si N est une sous-variété pour laquelle tous les champs de vecteurs fondamentaux sont tangents à N, alors cette sous-variété est naturellement munie d'une $\mathcal{G}$-action induite. Une application $f:M\to W$ entre $\mathcal{G}$-variétes sera dite $\mathcal{G}$-équivariante si pour tout $h\in\mathcal{G}$ et $x\in M$, on a $df_x(X_x^h(M))=X_{f(x)}^h(W)$ (i.e. les champs de vecteurs fondamentaux $X^h(M)$ et $X^h(W)$ sont f-reliés).
Soit τ une action de $\mathcal{G}$ sur M. La famille des champs de vecteurs $(\tau(h))_{h\in\mathcal{G}}$ définit un *feuilletage singulier* sur M ([28], [29]). Pour tout $x\in M$, la feuille passante par x et qu'on appellera aussi la $\mathcal{G}$-orbite en x est la sous-variété connexe $\mathcal{G}(x)$ immergée dans M définie par :

$$y\in\mathcal{G}(x)\Leftrightarrow(\exists X_{i_1},\ldots,X_{i_r}\in\tau\mathcal{G}\ ,\ \exists t_{i_1},\ldots,t_{i_r}\in\mathbb{R}\ ,y=\varphi_{t_{i_1}}^{X_{i_1}}\circ\cdots\circ\varphi_{t_{i_r}}^{X_{i_r}}(x)$$

où φ^X est le flot du champ de vecteurs X. La topologie de la feuille $\mathcal{G}(x)$ étant la topologie la plus fine rendant continues toutes les applications

$$(t_1,\ldots,t_k)\in U_{\xi,k}\mapsto\varphi_{t_1}^{X_1}\circ\cdots\circ\varphi_{t_k}^{X_k}(x)\in M\ \ ;$$

où $k\in\mathbb{N}$, $\xi=(X_1,\ldots,X_k)\in\mathcal{G}^k$ et $U_{\xi,k}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^k$. La dimension de $\mathcal{G}(x)$ est égale à $dim(\mathcal{G})-dim(\mathcal{G}_x)$, $\mathcal{G}_x$ étant l'isotropie en x c'est-à-dire le noyau de l'application linéaire $\tau_x:h\in\mathcal{G}\mapsto\tau(h)_x\in T_xM$; une carte locale en x peut-être obtenue comme suit : soit $\beta^x:=\{e_1,\ldots,e_p\}$ une famille libre de $\mathcal{G}$ telle que la famille des classes $\{\overline{e_1},\ldots,\overline{e_p}\}$ soit une base de $\mathcal{G}/\mathcal{G}_x$, alors l'application

$$\varphi_{\beta^x}:(t_1,\ldots,t_p)\in\mathbb{R}^p\mapsto\varphi_{t_1}^{\tau(e_1)}\circ\cdots\circ\varphi_{t_p}^{\tau(e_p)}(x)$$

est un difféomorphisme local d'un voisinage de zéro de $\mathbb{R}^p$ sur un voisinage de x dans $\mathcal{G}(x)$; pour obtenir une carte locale en un point $y:=\varphi_{t_{i_1}}^{X_{i_1}}\circ\cdots\circ\varphi_{t_{i_k}}^{X_{i_k}}(x)\in$

$\mathcal{G}(x)$, il suffit de considérer la composition $\varphi := \varphi_{t_{i_1}}^{X_{i_1}} \circ \cdots \circ \varphi_{t_{i_k}}^{X_{i_k}} \circ \varphi_{\beta^x}$.
Une $\mathcal{G}$-action sera dite transitive si elle n'admet qu'une seule $\mathcal{G}$-orbite ; pour toute $\mathcal{G}$-action les $\mathcal{G}$-orbites sont munies d'une action naturelle induite et celle-ci est transitive.
La relation d'appartenance à une même $\mathcal{G}$-orbite est une relation d'équivalence sur M. On désignera par $M/\mathcal{G}$ l'espace des classes d'équivalences, qu'on munira de la topologie quotient et qu'on appellera aussi espace des feuilles.
Il est important de noter que contrairement aux actions de groupes de Lie, tout ouvert U d'une $\mathcal{G}$-variété est naturellement muni d'une action induite $\tau_U : \mathcal{G} \to \mathcal{V}(U)$ définie par la restriction : $\tau_U(h) := \tau(h)_{|_U}$. On dira qu'une partie $F \subset M$ est $\mathcal{G}$-invariante (ou invariante par l'action τ) si elle est saturée de feuilles ; autrement dit, pour tout point x dans F la $\mathcal{G}$-orbite $\mathcal{G}(x)$ est contenue dans F ce qui équivaut à : $\forall x \in F\ \ \forall X \in \tau(\mathcal{G})$, l'image de la courbe intégrale $t \mapsto \varphi_t^X(x)$ est entièrement incluse dans F. *Evidement, tout-ouvert U est invariant par l'action τ_U mais il existe des ouverts qui ne sont pas invariants par l'action τ.*
Une $\mathcal{G}$-action $\tau : \mathcal{G} \to \mathcal{V}(M)$ est dite *faiblement-complète* s'il existe un sous-ensemble $S \subset \mathcal{G}$ qui engendre l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ (i.e. toute sous-algèbre de Lie de $\mathcal{G}$ contenant S coïncide avec $\mathcal{G}$) tel que pour tout $h \in S$ le champ de vecteurs $\tau(h)$ soit complet.

2.2. Intégrabilité. Soit G un groupe de Lie. Une action différentiable (à gauche) de G sur M est la donnée d'un homomorphisme $\rho : G \to \mathrm{Diff}(M)$ de G dans le groupe des difféomorphisme de M, de façon que l'application induite $\rho : G \times M \to M$ donnée par $\rho(g,x) := \rho(g)x$ soit différentiable. Toute action du groupe de Lie G sur M induit une action de son algèbre de Lie $\mathcal{G}$ sur M, c'est l'action infinitésimale associée (ou l'action dérivée ou encore la *différentielle* de l'action ρ), celle-ci sera notée $\rho' : \mathcal{G} \to \mathcal{V}(M)$, elle est définie comme suit : *pour tout vecteur $h \in \mathcal{G}$ on associe le champ de vecteurs fondamental X^h dont les courbes intégrales sont : $t \mapsto \rho(\exp(-th))x$; et l'on pose $\rho'(h) = X^h$.*
Si maintenant τ est une action d'une algèbre de Lie $\mathcal{G}$ sur M, on dira que cette action est intégrable ou qu'elle admet une *primitive* s'il existe un groupe de Lie G d'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ et qu'il existe une action différentiable $\rho : G \to \mathrm{Diff}(M)$ de G sur M tels que $\rho' = \tau$ (Il n'est pas supposé que ce groupe G soit simplement connexe). L'action ρ sera dite une *primitive* de τ. Notons que dès que G est connexe, les G-orbites de l'action ρ coïncident avec les $\mathcal{G}$-orbites de l'action ρ' et qu'au niveau des espaces d'orbites on a aussi $M/\mathcal{G} = M/G$.
Un théorème maintenant classique de Palais [23] assure que toute action faiblement-complète d'algèbre de Lie admet des primitives.

3. Cohomologie des formes divergences

Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie de dimension finie, et soit $\tau : \mathcal{G} \to \mathcal{V}(M)$ un homomorphisme d'algèbre de Lie. On note $\Omega_c^r(M)$ l'espace des r-formes différentielles à support compact dans M. Le sous-espace de $\Omega_c^r(M)$ engendré par les formes $\mathrm{L}_X\alpha$ avec $\alpha \in \Omega_c^r(M)$ et $X \in \tau(\mathcal{G})$ sera noté $C_\tau^r(M)$: c'est l'espace des *formes*

τ*-divergences.* Considérons alors l'espace vectoriel gradué :

$$C_\tau^*(M) := \bigoplus_r C_\tau^r(M).$$

Il est facile de voir à cause de la formule de Cartan ($\mathrm{L}_X \circ d = d \circ \mathrm{L}_X$) que pour la différentielle de de Rham, cet espace gradué est un complexe différentiel ; il a par suite une cohomologie :

$$H_\tau^*(M) := \frac{\ker\{d : C_\tau^r(M) \to C_\tau^{r+1}(M)\}}{d(C_\tau^{r-1}(M))}$$

que nous appellerons *cohomologie des formes* τ*-divergences*, qu'on notera $H_\tau^*(M)$ ou $H_{\mathcal{G}}^*(M)$.

Exemple 3.1. Calculons la cohomologie $H_\tau^*(M)$ dans le cas où $M := \mathbb{R}$ et que $\tau : \mathbb{R} \to \mathcal{V}(M)$ est l'action de $\mathcal{G} := \mathbb{R}$ donnée par : $\tau(1) := x^2 \frac{d}{dx}$.
Evidement $H_\tau^0(M) = 0$ (puisque M est non compacte), la question se pose au niveau de $H_\tau^1(M) := C_\tau^1(M)/d(C_\tau^0(M))$.
Soit $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Il est facile de voir : que $f \in C_\tau^0(M)$ si et seulement si la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2} f(x)$ admet une *primitive* dans $C_c^\infty(\mathbb{R})$, que $\alpha = f dx \in C_\tau^1(M)$ si et seulement si la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2} \int_0^x f(t)dt$ appartient à $C_c^\infty(\mathbb{R})$, et que $\alpha = f dx \in d(C_\tau^0(M))$ si et seulement si la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2} \int_0^x f(t)dt$ admet une primitive dans $C_c^\infty(\mathbb{R})$.
Considérons ensuite la forme linéaire $J : C_\tau^1(M) \to \mathbb{R}$ donnée par

$$J(f dx) := \int_{\mathbb{R}} (\frac{1}{x^2} \int_0^x f(t)dt)dx$$

J est surjective car non nulle (en effet, partant d'une fonction $p \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\int_{\mathbb{R}} p(x)dx = 1$, on peut considérer $\alpha := (x^2 p(x))' dx$, on a $J(\alpha) = 1$). D'autre part, le noyau $\ker J$ de la forme J est égal à $d(C_\tau^0(M))$ (La raison évidente en est que pour $h \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, dire que h admet une primitive dans $C_c^\infty(\mathbb{R})$ équivaut à ce que $\int_{\mathbb{R}} h(x)dx = 0$).
Ainsi: $H_\tau^1(M) \cong \mathbb{R}$, l'isomorphisme étant réalisé par $\overline{J} : [f dx] \mapsto J(f dx)$.

3.1. Calcul de $H_\tau^0(M)$. Soit M une $\mathcal{G}$-variété connexe. On a :

$$H_\tau^0(M) := \{r \in \mathbb{R} / \ r = \sum_i X_i f_i \ \text{ avec } \ X_i \in \tau\mathcal{G}, \ f_i \in C_c^\infty(M)\} .$$

Il est clair que que cet espace est trivial si M est non compacte.

Proposition 3.2. *Soit M une $\mathcal{G}$-variété compacte connexe.*
(i) S'il existe une forme volume $\mathcal{G}$-invariante sur M, alors $H_\tau^0(M) = 0$.
(ii) S'il n'existe pas de de forme volume $\mathcal{G}$-invariante sur M et que la $\mathcal{G}$-action est transitive, nous avons $H_\tau^0(M) = \mathbb{R}$.

Preuve. i) Soit ν une forme volume $\mathcal{G}$-invariante sur M. Il découle du théorème usuel de Stokes que $\int_M (Xf)\nu = 0$ pour tout $X \in \tau\mathcal{G}$ et $f \in C^\infty(M)$. Ceci implique que $H_\tau^0(M) = 0$.
ii) cette assertion est une conséquence d'un théorème de Herz (theorem 1 [16] p.642). ∎

Exemples-Remarques. (a) Soit G un groupe de Lie unimodulaire et H un sous-groupe de Lie fermé connexe et non unimodulaire, tel que l'espace homogène G/H soit compact. Pour l'action naturelle $\mathcal{G} \to \mathcal{V}(G/H)$, nous avons : $H^0_\tau(G/H) = \mathbb{R}$. [Comme exemple précis d'une telle situation, on peut prendre $G := \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, H le sous-groupe des matrices du type $A = \begin{pmatrix} \sqrt{a} & \frac{b}{\sqrt{a}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{a}} \end{pmatrix}$ où $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$; de façon que $G/H \cong \mathrm{S}^1$.]
(b) D'une manière plus générale que l'assertion (i), supposons l'existence sur M d'une distribution μ non nulle sur la fonction constante 1 et qui soit $\mathcal{G}$-invariante (c-à-d il existe une fonctionnelle linéaire continue sur l'espace de Schwartz $C^\infty_c(M)$ telle que $\langle \mu, 1\rangle \neq 0$ et $\langle \mu, \tau(h)f\rangle = 0$ pour tout $h \in \mathcal{G}$). Alors un raisonnement similaire au cas d'une forme volume invariante nous permet de montrer que $H^0_\tau(M) = 0$. Comme exemples précis d'une telle situation :
- Supposons que la $\mathcal{G}$-action posséde un point fixe x i.e. un point où tous les champs de vecteurs $\tau(h)$ s'annulent ($\tau(h)_x = 0 \ \forall h \in \mathcal{G}$), alors la mesure de Dirac δ_x est une distribution $\mathcal{G}$-invariante sur M (où $\langle \delta_x, f\rangle = f(x)$).
- Si g est une métrique riemannienne $\mathcal{G}$-invariante sur M, alors la forme volume ν_g associée à la métrique définit une distribution $\mathcal{G}$-invariante sur M.

3.2. Propriétés de la cohomologie des formes divergences. Nous allons montrer que la cohomologie des formes divergences est un invariant d'un type d'homotopie qu'on appelle *homotopie $\mathcal{G}$-propre.*
Soient M et N deux $\mathcal{G}$-variétés. Toute application $f : M \to N$ qui soit $\mathcal{G}$-équivariante et propre (c-à-d l'image réciproque d'un compact C de N est un compact $f^{-1}(C)$ de M), va induire par image réciproque (*pull-back* $\omega \mapsto f^*(\omega)$) un homomorphisme de complexes : $f^*_\mathcal{G} : C^*_\mathcal{G}(N) \to C^*_\mathcal{G}(M)$. D'où l'existence d'un homomorphisme d'espaces vectoriels gradués :

$$H^*(f_\mathcal{G}) : H^*_\mathcal{G}(N) \to H^*_\mathcal{G}(M)$$

Définition 3.3. Soient $\varphi, \psi : M \to N$ deux applications $\mathcal{G}$-équivariantes et propres. L'application φ est $\mathcal{G}$-proprement homotope à ψ s'il existe une application $H : M \times \mathbb{R} \to N$ ayant les propriétés :

1. $H(x,t) = \varphi(x)$ pour tout $t \leq 0$.
2. $H(x,t) = \psi(x)$ pour tout $t \geq 1$.
3. La restriction de H à $M \times [0,1]$ est une application propre et $\mathcal{G}$-équivariante (où $\mathcal{G}$ opère sur $M \times \mathbb{R}$ par extension naturelle de l'action sur M en associant à un champ de vecteurs X sur M le champ de vecteurs $\widehat{X} \in \mathcal{V}(M \times \mathbb{R})$ défini par $\widehat{X}_{(x,t)} := X_x + 0_t \in T_xM \oplus T_t\mathbb{R} \cong T_{(x,t)}(M \times \mathbb{R})$)

Proposition 3.4. *soient φ et ψ deux applications propres et $\mathcal{G}$-équivariantes de M dans N.*
Si φ et ψ sont $\mathcal{G}$-proprement homotopes, alors : $H^*(\varphi_\mathcal{G}) = H^*(\psi_\mathcal{G})$.

Preuve. La démonstration va se faire comme dans le cas de la cohomologie des formes [13][14]. En effet, les applications φ et ψ étant homotopes, il existe alors un opérateur d'homotopie $K : \Omega^*(N) \to \Omega^{*-1}(M)$ naturellement associé à l'application H et tel que pour toute forme $\omega \in \Omega^r(N)$ on a :

$$\psi^*(\omega) - \varphi^*(\omega) = dK(\omega) \pm Kd\omega$$

cet opérateur K étant défini par :

$$K(\omega) := \oint_{[0,1]} H^*(\omega) \ ,$$

soit encore pour $x \in M$ et $X_x^1, \cdots, X_x^r \in T_xM$, on a :

$$K(\omega)_x(X_x^1, \cdots, X_x^r) := \int_0^1 (H^*(\omega))_{(x,t)}(X_x^1, \cdots, X_x^r, (\frac{d}{dt})_t)dt.$$

Et puisque H est propre et $\mathcal{G}$-équivariante, il en découle alors que l'opérateur K envoie une forme à support compact sur une autre forme à support compact, et que K commute avec l'opérateur dérivée de Lie L_X pour tout $X \in \tau(\mathcal{G})$. Si l'on désigne alors par $K_{\mathcal{G}}$ la restriction de K à l'espace $C^*_{\mathcal{G}}(N)$, nous obtenons un opérateur $K_{\mathcal{G}} : C^*_{\mathcal{G}}(N) \to C^{*-1}_{\mathcal{G}}(M)$ qui satisfait:

$$\psi^*_{\mathcal{G}}(\omega) - \varphi^*_{\mathcal{G}}(\omega) = dK_{\mathcal{G}}(\omega) \pm K_{\mathcal{G}}d\omega. \qquad \blacksquare$$

Définition 3.5. Soit M une $\mathcal{G}$-variété. Soit $\iota : W \hookrightarrow M$ une sous-variété plongée fermée dans M, et qui soit $\mathcal{G}$-invariante.
On dira que W est un retract par déformation $\mathcal{G}$-propre de M s'il existe $R : M \to W$ application propre $\mathcal{G}$-équivariante telle que :

1. $R \circ \iota = Id_W$,
2. $\iota \circ R$ est $\mathcal{G}$-proprement homotope à Id_M.

Corollaire 3.6. *Si W est un retract par déformation $\mathcal{G}$-propre de M. Alors : W et M ont mêmes espaces de cohomologie divergence.*

Nous allons maintenant exprimer, comme dans le cas usuel des formes à support compact, une suite exacte courte à la Mayer-Vietoris. On dira qu'une fonction $\rho \in C^\infty(M)$ est $\mathcal{G}$-invariante si $X\rho = 0$ pour tout $X \in \tau(\mathcal{G})$. L'espace $(C^\infty(M))^{\mathcal{G}}$ désignera l'espace des fonctions invariantes.

Proposition 3.7. *Soit M une $\mathcal{G}$-variété. Soient U et V deux ouverts $\mathcal{G}$-invariants tels que $M = U \cup V$. On suppose l'existence d'une partition de l'unité adaptée $\{\rho_U, \rho_V\}$ et qui soit $\mathcal{G}$-invariante i.e. $\rho_U, \rho_V \in (C^\infty(M))^{\mathcal{G}}$ avec :*

$$1 = \rho_U + \rho_V \ , \ \mathrm{supp}(\rho_U) \subset U \ , \ \mathrm{supp}(\rho_V) \subset V \ ,$$

Alors il existe une suite exacte courte :

$$0 \to C^*_{\mathcal{G}}(U \cap V) \to C^*_{\mathcal{G}}(U) \oplus C^*_{\mathcal{G}}(V) \to C^*_{\mathcal{G}}(M) \to 0$$

La démonstration se fait de la même façon que dans le cas classique.

4. Quelques propriétés des $\mathcal{G}$-variétés propres

Une action $G \to \mathrm{Diff}(M)$ d'un groupe de Lie G sur M est dite propre si pour tout compact C de M l'ensemble $\{g \in G \ / \ gC \cap C \neq \emptyset\}$ est compact. Ceci équivaut au fait que l'application $(g,x) \in G \times M \Rightarrow (gx,x) \in M \times M$ est une application propre [9][24][19].

Définition 4.1. Une action d'algèbre de Lie $\tau : \mathcal{G} \to \mathcal{V}(M)$ est dite *propre* si elle admet une primitive propre i.e. si elle est intégrable en une action propre de groupe de Lie.
On dira alors que M est une $\mathcal{G}$-variété propre.

Exemples simples et remarques. (a) Pour toute variété riemannienne (M,g), l'action effective naturelle de l'algèbre de Lie des champs de Killing $\mathrm{Kill}_g(M)$ [2] sur M est propre. C'est une conséquence du fait que le groupe des isométries $\mathrm{Iso}(M,g)$ d'une telle variété opére proprement sur M.

(b) Lorsque la variété M est compacte, dire que l'action $\tau : \mathcal{G} \to \mathcal{V}(M)$ est propre équivaut à ce qu'elle soit intégrable en une action d'un groupe de Lie compact. Si en particulier $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{G}) = 1$ et M compacte (i.e. dans le cas d'un champ de vecteurs), la $\mathcal{G}$-action est propre si et seulement si elle est intégrable en une action du cercle S^1 ; c'est ainsi par exemple que le flot à pente irrationnelle sur le tore $\mathbb{T}^2 := \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ définit une action d'algèbre de Lie qui est non propre.

(c) Si M est une $\mathcal{G}$-variété propre, alors les $\mathcal{G}$-orbites sont fermées dans M et l'espace des feuilles $M/\mathcal{G}$ est de Hausdorff.

(d) Une autre condition nécessaire pour qu'une $\mathcal{G}$-action soit propre est qu'il existe une métrique riemannienne g sur M pour laquelle l'action est par isométries i.e. $\tau(\mathcal{G}) \subset \mathrm{Kill}_g(M)$. La réciproque est évidemment fausse.

(e) Désignons par $\mathrm{S}(n)$ l'espace des matrices carrées $n \times n$ qui sont symétriques ($B = B^\top$ matrice transposée). Le groupe $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$ des matrices carrées $n \times n$ de déterminant positif est un groupe de Lie connexe opérant sur $\mathrm{S}(n)$ via l'application $g.B := gBg^\top$, c'est une action non propre (puisque le groupe d'isotropie en 0, qui n'est autre que le groupe tout entier, est non compact). Par contre, si on se limite à $M := \mathrm{S}^+(n)$ l'espace des matrices symétriques définies positives (qui est un ouvert de $\mathrm{S}(n)$), l'action :

$$\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R}) \times \mathrm{S}^+(n) \to \mathrm{S}^+(n), \quad g.B := gBg^\top$$

est propre et transitive (le groupe d'isotropie en I_n, la matrice identité, n'est autre que le groupe spécial orthogonal $\mathrm{SO}(n)$). L'algèbre de Lie de $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$ étant l'algèbre de Lie usuelle $M(n,\mathbb{R})$ de toutes les matrices carrées $n \times n$; l'action infinitésimale $\tau : M(n,\mathbb{R}) \to \mathcal{V}(M)$ est donnée par : $H \in M(n,\mathbb{R}) \mapsto \tau(H)$ la restriction à $\mathrm{S}^+(n)$ du champ de vecteurs X^H défini sur $\mathrm{S}(n)$ par l'endomorphisme

[2] Un champ de vecteurs $X \in \mathcal{V}(M)$ est dit de Killing si $\mathrm{L}_X g = 0$ i.e. son flot préserve la métrique g, cela signifie que pour tous $Y, Z \in \mathcal{V}(M)$ on a $X \cdot g(Y,Z) = g([X,Y],Z) + g(Y,[X,Z])$.

$X^H(B) := -HB - BH^\top$. L'action τ ainsi obtenue est une action propre de l'algèbre de Lie $M(n,\mathbb{R})$ sur $\mathrm{S}^+(n)$.

4.1. Critère de $\mathcal{G}$-propreté. Soit M une variété différentiable. Soit G un sous-groupe de $\mathrm{Diff}(M)$ groupe des difféomorphismes de M. On rappelle que la topologie *compacte-ouverte-mmodifiée* sur G est la topologie ayant comme base les composantes connexes par arcs des ouverts de la topologie compacte-ouverte (voir [23] p. 114 pour les détails). C'est évidemment une topologie plus fine que la topologie compacte-ouverte.
On dira qu'une action $\tau : \mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{V}(M)$ est *effective* si l'homomorphisme τ est injectif, ce qui signifie que pour tout $h \in \mathcal{G}$, $h \neq 0$ il existe $x \in M$ tel que le vecteur tangent $\tau(h)_x$ soit non nul.

Théorème 4.2. *Soit $\tau : \mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{V}(M)$ une action faiblement-complète et effective. Soit $T(\mathcal{G})$ le groupe engendré par les flots φ_t^X pour $t \in \mathbb{R}$ et X champ de vecteurs complet dans $\tau(\mathcal{G})$). On munit ce groupe de sa topologie compacte-ouverte-modifiée.*
Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *L'action de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ sur M est propre.*
2. *L'action du groupe $T(\mathcal{G})$ sur M est propre.*

En particulier si M est compacte nous avons l'équivalence : (l'action de $\mathcal{G}$ sur M est propre) ssi (le groupe $T(\mathcal{G})$ est compact).

Preuve. L'implication $2 \Rightarrow 1$ est une conséquence de la théorie d'intégrabilité de Palais, en effet : le groupe $T(\mathcal{G})$ possède une structure de groupe de Lie connexe de façon que l'action effective naturelle de celui-ci sur M soit différentiable et qu'elle soit une primitive de τ (voir [26] p. 117) ; le fait que la topologie de $T(\mathcal{G})$ est bien la topologie compacte-ouverte-modifiée est due au théorème *vi* [23] p.101.
Réciproquement, supposons que $\rho : G \to \mathrm{Diff}(M)$ est une action propre d'un groupe de Lie connexe G telle que $\rho' = \tau$. Il en découle à cause de la connexité de G et de la définition de $T(\mathcal{G})$, que l'image de ρ est égale à $T(\mathcal{G})$, nous obtenons ainsi un homorphisme surjectif de groupes topologiques $\widehat{\rho} : G \to T(\mathcal{G})$. Il s'en suit alors que l'action de $T(\mathcal{G})$ sur M est propre, en effet, pour tout compact K de M l'ensemble $T(\mathcal{G})_C := \{a \in\ T(\mathcal{G})/\ aC \cap C \neq \emptyset\}$ n'est autre que l'image par l'application continue $\widehat{\rho}$ du compact $G_C := \{g \in\ G/\ gC \cap C \neq \emptyset\}$. ■

Corollaire 4.3. *Soit (M, g) une variété riemannienne, et soit $\mathcal{G} \subset \mathrm{Kill}_g(M)$ une sous-algèbre de Lie engendrée par des champs de vecteurs complets. Alors :*
L'action de $\mathcal{G}$ sur M est propre si et seulement s'il existe $x \in M$ tel que les deux assertions suivantes soient satisfaites :

1. *la $\mathcal{G}$-orbite $\mathcal{G}(x)$ est fermée dans M.*
2. *le groupe d'isotropie $T(\mathcal{G})_x$ est fermé (donc compact) dans $\mathrm{Iso}(M, g)$.*

Preuve. Dans les conditions de départ le groupe de Lie $T(\mathcal{G})$ est alors un groupe de Lie opérant effectivement et par isométries sur M (donc s'injecte en tant que sous-groupe dans $\mathrm{Iso}(M, g)$ mais $T(\mathcal{G})$ n'est pas forcement un fermé de $\mathrm{Iso}(M, g)$), il suffit ensuite d'appliquer le critère de Kulkarni ([20] p.43.) pour conclure. ■

Il est par ailleurs bien connu que sur une variété riemannienne complète tout champ de vecteurs est complet (voir [26]), comme conséquence de ce corollaire nous obtenons :

Théorème 4.4. *Soit* (M, g) *une variété riemannienne complète. Soit* $\mathcal{G} \subset \mathrm{Kill}_g(M)$ *une sous-algèbre de Lie. Désignons par* $\mathrm{Iso}(M, g)$ *le groupe des isométries muni de sa topologie usuelle compacte-ouverte et par* $T(\mathcal{G}) \subset \mathrm{Iso}(M, g)$ *le groupe engendré par les flots* φ_t^X *pour* $t \in \mathbb{R}$ *et* $X \in \mathcal{G}$*. Alors :*
L'action de $\mathcal{G}$ *sur* M *est propre si et seulement s'il existe* $x \in M$ *tel que les deux assertions suivantes soient satisfaites :*

1. *la* $\mathcal{G}$*-orbite* $\mathcal{G}(x)$ *est fermée dans* M*.*
2. *le groupe d'isotropie* $T(\mathcal{G})_x$ *est fermé (donc compact) dans* $\mathrm{Iso}(M, g)$*.*

4.2. Géodésibilité. On appelle feuilletage géodésible tout feuilletage $(M, \mathcal{F})$ pour lequel il existe une métrique riemannienne g sur M dont la seconde forme fondamentale associée α_g est nulle ; celle-ci étant donnée par :

$$\alpha_g : (X, X') \to \frac{1}{2}(\nabla^g_X X' + \nabla^g_{X'} X)^\perp$$

pour $X, X' \in \mathcal{F}$, où ∇^g est la connection de Levi-Civita associée à g. En particulier, ces feuilletages sont *minimalisables* ([27]), i.e. il existe une métrique riemannienne g pour laquelle la courbure moyenne κ_g est nulle ; la raison évidente est que κ_g est la forme différentielle (semi-basique) donnée par :

$$\kappa_g(Y) = \mathrm{Tr}_g(W(Y)) \quad \forall Y \in (\mathcal{F})^\perp$$

avec $W(Y)$ désigne l'endomorphisme du fibré vectoriel $\mathcal{F}$, donné par :

$$g_{\mathcal{F}}(W(Y)X, X') = g_{\mathcal{F}^\perp}(\alpha(X, X'), Y)$$

où $g_{\mathcal{F}}$ (resp. $g_{\mathcal{F}^\perp}$) désigne la métrique induite sur le fibré $\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{F}^\perp$).
On dira qu'une $\mathcal{G}$-action $\tau : \mathcal{G} \to \mathcal{V}(M)$ est libre si pour tout $x \in M$, l'application $h \in \mathcal{G} \mapsto \tau(h)_x \in T_xM$ est injective. Le feuilletage associé à l'action est alors régulier sur M (la dimension des feuilles étant celle de $\mathcal{G}$).

Proposition 4.5. *Soit* $\tau : \mathcal{G} \to \mathcal{V}(M)$ *une action propre et libre.*
Alors le feuilletage $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$ *associé à l'action est géodésible, i.e. il existe une métrique* g *sur* M *telle que* $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$ *soit totalement géodésique et riemannien avec* g *comme métrique quasi-fibré (cette métrique n'est pas forcement* $\mathcal{G}$*-invariante).*

Preuve. Soit g_0 une métrique riemannienne $\mathcal{G}$-invariante sur M ($\tau(\mathcal{G}) \subset \mathrm{Kill}_{g_0}(M)$). Soit η_0 le supplémentaire orthogonal au feuilletage $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$ relativement à la métrique g_0 ; celui-ci est bien sûr $\mathcal{G}$-stable (ici le mot fibré vectoriel $\mathcal{G}$-stable signifie qu'il est invariant par les flots des champs de vecteurs fondamentaux $\tau(h)$, ce qui équivaut à ce que l'espace total et la base de ce fibré sont des $\mathcal{G}$-variétés et que la projection π de ce fibré est $\mathcal{G}$-équivariante).
Soit $\{e_1, ..., e_p\}$ une base de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de G. Notons $\{X^1, ..., X^p\}$ les

champs de vecteurs fondamentaux associés. La famille $\{X^1, ..., X^p\}$ est une base du $C^\infty(M)$-module $\mathcal{V}(\mathcal{F}_\mathcal{G}) = \mathcal{C}^\infty(\mathcal{F}_\mathcal{G})$ ensemble des sections du fibré $\mathcal{F}_\mathcal{G}$. Soit $\langle , \rangle_\mathcal{G}$ la métrique riemannienne sur $\mathcal{F}_\mathcal{G}$ telle que le repère $\{X^1, ..., X^p\}$ soit orthonormé. On définit alors une nouvelle métrique $\langle , \rangle$ sur le fibré tangent TM en posant

$$\langle \cdot, \cdot \rangle := \langle , \rangle_\mathcal{G} \oplus \langle , \rangle_0.$$

La connexion de Levi-Civita associée à cette nouvelle métrique sera désignée par ∇. Pour $i, j = 1, ..., p$ et Y orthogonal à $\mathcal{F}_\mathcal{G}$, on a :

$$\langle \nabla_{X^i} X^j, Y \rangle = -\langle X^j, \nabla_{X^i} Y \rangle$$

et par suite $\langle \nabla_{X^i} X^j, Y \rangle = -\langle X^j, \nabla_Y X^i + [X^i, Y] \rangle$.
Or $Y \in \eta_0$ et η_0 est $\mathcal{G}$-stable donc $[X^i, Y] \in \eta_0$ et par suite $\langle [X^i, Y], X^j \rangle = 0$; nous avons donc :

$$\langle \nabla_{X^i} X^j, Y \rangle = -\langle X^j, \nabla_Y X^i \rangle$$

nous aurons alors :

$$\langle \nabla_{X^i} X^j, Y \rangle = +\langle X^i, \nabla_Y X^j \rangle$$

ainsi on peut écrire (i et j jouent des rôles symétriques)

$$\langle \nabla_{X^j} X^i, Y \rangle = +\langle X^j, \nabla_Y X^i \rangle$$

et puisque $\langle \nabla_{X^i} X^j, Y \rangle = \langle \nabla_{X^j} X^i, Y \rangle$ (car ∇ est sans torsion et $[X^i, X^j] \in \mathcal{V}(\mathcal{F}_\mathcal{G})$), nous aurons

$$\langle \nabla_{X^i} X^j, Y \rangle = +\langle X^j, \nabla_Y X^i \rangle$$

cette quantité est forcement nulle. ∎

Exemple. [Le graphe d'une Killing-variété].
Soit $\tau : \mathcal{G} \to \mathcal{V}(M)$ une action de $\mathcal{G}$ sur M. Soit G un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie $\mathcal{G}$. Alors, on peut considérer la $\mathcal{G}$-action $\widehat{\tau}$ de $\mathcal{G}$ sur $G \times M$ donnée par : $\widehat{\tau}(h) = (L^h, \tau(h))$, où L^h est le champ de vecteurs invariant à gauche sur G associé à h. Cette action est libre, on l'appelle graphe de la $\mathcal{G}$-action τ.
Supposons maintenant l'existence d'une métrique riemannienne $\langle , \rangle$ sur M telle que l'action τ soit par isométries (i.e. $\tau(\mathcal{G}) \subset \mathrm{Kill}(M)$). Il est facile de vérifier que $\widehat{\tau}$ est aussi une action par isométries (il suffit en effet de prendre sur $G \times M$ une métrique produit d'une métrique invariante à droite sur G et celle de M). On parle alors du graphe d'une Killing-variété.
Il en découle de la preuve ci-dessus que toute graphe d'une Killing-variété est géodésible. En particulier :

Corollaire 4.6. *Toute graphe d'une $\mathcal{G}$-action propre est géodésible.*

5. Cohomologie des formes divergences d'une $\mathcal{G}$-variété propre

Définition 5.1. Soit M une $\mathcal{G}$-variété. Une forme différentielle ω sera dite $\mathcal{G}$-semi-invariante si pour tout champ de vecteurs $X \in \tau(\mathcal{G})$ on a:

$$\mathrm{L}_X\omega = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_X)\omega,$$

$\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_X)$ étant la trace de la représentation adjointe de l'algèbre de Lie $\tau(\mathcal{G})$.
À cause de la formule classique $\mathrm{L}_X\omega = \frac{d}{dt}_{|t=0}(\varphi_t^X)^*\omega$ reliant la derivée de Lie L_X et le flot φ_t^X du champ de vecteurs X, il est facile de montrer que ω est $\mathcal{G}$-semi-invariante si et seulement si $\forall X \in \tau(\mathcal{G})$ et $\forall t$ on a :

$$(\varphi_t^X)^*\omega = e^{t\,\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_X)}\omega.$$

Nous en déduisons alors :

Lemme 5.2. *Soit ω une forme $\mathcal{G}$-semi-invariante. Alors, le support supp(ω) de la forme ω est $\mathcal{G}$-invariant (i.e. le sous-ensemble fermé supp(ω) est stable par les flots φ_t^X).*

Si $F \subset M$ est un fermé $\mathcal{G}$-invariant, on peut considérer l'espace des $\mathcal{G}$-orbites $F/\mathcal{G}$ i.e. l'espace quotient de F par la relation d'équivalence d'appartenance à la même $\mathcal{G}$-orbite, muni de sa topologie quotient. *On dira que F est $\mathcal{G}$-compact si l'espace topologique $F/\mathcal{G}$ est compact.*
L'espace vectoriel des formes différentielles $\mathcal{G}$-semi-invariantes est stable par la différentielle de de-Rham. Le sous-espace des formes différentielles qui sont à la fois $\mathcal{G}$-semi-invariantes et à support $\mathcal{G}$-compact, est également un espace stable par la différentielle de de-Rham, c'est ainsi un complexe différentiel qu'on notera

$$((\Omega_{\mathcal{G}c}^{\mathcal{G}s})^*(M), d)$$

L'espace de cohomologie obtenu sera noté $H_{\mathcal{G}c}^*(M^{\mathcal{G}s})$. Si l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ est unimodulaire (c'est-à-dire $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_X) = 0$ pour tout $X \in \mathcal{G}$), il s'agit alors de la cohomologie des formes $\mathcal{G}$-invariantes à support $\mathcal{G}$-compact ; et si en plus l'espace des $\mathcal{G}$-orbites $M/\mathcal{G}$ est compact, on obtient tout simplement la cohomologie de toutes les formes $\mathcal{G}$-invariantes.

Théorème 5.3. *Soit $\tau : \mathcal{G} \to \mathcal{V}(M)$ une $\mathcal{G}$-action propre.*
Alors il existe une suite exacte longue de cohomologie:

$$0 \to H_c^0(M) \to H_{\mathcal{G}c}^0(M^{\mathcal{G}s}) \to H_\tau^1(M) \to H_c^1(M) \to \cdots$$

$$\cdots \to H_\tau^r(M) \to H_c^r(M) \to H_{\mathcal{G}c}^r(M^{\mathcal{G}s}) \to H_\tau^{r+1}(M) \to \cdots$$

La démonstration de ce théorème sera faite en fin de section, nous allons auparavant en tirer quelques conséquences.
Supposons maintenant que l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ est unimodulaire (par exemple, l'algèbre des matrices de trace nulle $\mathrm{sl}(n,\mathbb{R})$). Le théorème 5.1 devient :

Théorème 5.4. *Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie unimodulaire et soit M une $\mathcal{G}$-variété propre telle que l'espace des feuilles $M/\mathcal{G}$ est compact.*
Alors il existe une suite exacte longue de cohomologie:

$$0 \to H^0_c(M) \to H^0(\Omega^{\mathcal{G}}(M)) \to H^1_\tau(M) \to \cdots$$

$$\cdots \to H^r_\tau(M) \to H^r_c(M) \to H^r(\Omega^{\mathcal{G}}(M)) \to H^{r+1}_\tau(M) \to \cdots$$

où $H^*(\Omega^{\mathcal{G}}(M))$ est la cohomologie des formes $\mathcal{G}$-invariantes.
En particulier si M est non compacte, alors $H^1_\tau(M) \neq 0$.

Corollaire 5.5. *Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie unimodulaire et soit M une $\mathcal{G}$-variété non compacte telle que $M/\mathcal{G}$ soit compact.*
Si $H^1_\tau(M) = 0$, alors la $\mathcal{G}$-action est non propre.

Il est bien connu que pour le cas d'une action d'un groupe de Lie compact connexe, le plongement naturel du complexe des formes G-invariantes dans celui de toutes les formes induit un isomorphisme en cohomologie ([14] p. 151, ou [15] p.24), nous obtenons alors :

Théorème 5.6. *Soit M une $\mathcal{G}$-variété compacte.*
Si la $\mathcal{G}$-action est propre. Alors : $H^*_\tau(M) = 0$.

Une méthode d'utilisation de ce théorème sera illustré par un exemple dans le paragraphe §6.

Exemple 5.7. Soit (M, g) une variété riemannienne compacte. Alors

$$H^*_{\mathrm{Kill}_g}(M) = 0,$$

où Kill_g est l'algèbre de Lie des champs de vecteurs de Killing.

Par ailleurs, d'après un fameux théorème de Weyl (voir [26], p. 343) *"Si $\mathcal{G}$ est une algèbre de Lie semi-simple et compacte, alors tout groupe de Lie G d'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ est nécessairement compact"*. (L'algèbre de Lie des matrices antisymétriques $so(n)$ est semi-simple compacte; mais l'algèbre de Lie abélienne $\mathbb{R}^n$ est compacte non semi-simple). Nous avons alors:

Corollaire 5.8. *Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie semi-simple compacte, et soit $\tau: \mathcal{G} \to \mathcal{V}(M)$ une action de $\mathcal{G}$ sur une variété compacte M. Alors : $H^*_\tau(M) = 0$.*

Supposons maintenant que l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ soit non-unimodulaire (c'est le cas par exemple de l'algèbre de Lie affine : $\mathcal{G} := \mathrm{vect}\{e_1, e_2\}$ muni du crochet $[e_1, e_2] = e_2$), il est alors clair que $H^0_{\mathcal{G}c}(M^{\mathcal{G}_s}) = 0$. En revenant ensuite à la suite exacte du théorème 5.1, nous aurons :

Proposition 5.9. *Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie non-unimodulaire, et soit M une variété telle que $H^1_c(M) = 0$. Alors :*
Pour toute $\mathcal{G}$-action propre sur M, on a $H^1_\tau(M) = 0$.

5.1. Preuve du théorème 5.1. Soit G un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie $\mathcal{G}$, et soit $\rho: G \to \mathrm{Diff}(M)$ une action G-propre primitive de τ : $\rho' = \tau$. Considérons une mesure de Haar dg invariante à droite sur G. Pour toute forme ω à support compact, on peut associer sa moyenne $m(\omega)$ (qui est à support non néssairement compact) et donnée par:

$$m(\omega) = \int_G \rho(g^{-1})^*(\omega) dg.$$

Plus précisement, soit $X^1, \dots, X^k \in \mathcal{V}(M)$ et $x \in M$ alors

$$m(\omega)_x(X^1, \dots, X^k) = \int_G \omega_{g^{-1}x}(g_*^{-1} X_x^1, \dots, g_*^{-1} X_x^k) dg\ .$$

Lemme 5.10. *m commute avec d : $m \circ d = d \circ m$.*

Preuve du lemme. On écrit l'opérateur m sous la forme

$$m(\alpha)_x(X^1, \dots, X^k) = \int_G f\omega$$

où $f(g) = \alpha_{g^{-1}x}(g_*^{-1} X_x^1, \dots, g_*^{-1} X_x^k)$, et ω est une forme volume invariante à droite sur G.
Désignons maintenant par $\rho : G \times M \to M$ l'application : $\rho(g, x) = g^{-1}.x$; et par $\pi_G : G \times M \to M$ la projection $\pi_G(g, x) = g$.
ρ n'est pas forcément une application propre (même si l'action est propre), mais si on prend l'image réciproque d'un compact K de M par cette application ρ, alors ce sous-ensemble $\rho^{-1}(K)$ de $G \times M$ est verticalement compact par rapport à la fibration triviale $\pi_M : G \times M \to M$ i.e. pour tout compact C de M, on a $\rho^{-1}(K) \cap (G \times C)$ est un compact de $G \times M$. Ainsi, pour toute forme à support compact $\alpha \in \Omega_c^p(M)$, la forme $\rho^*(\alpha) \wedge \pi_G^*(\omega)$ est à support verticalement compact relativement à la fibration $\pi_M : G \times M \to M$, donc on peut intégrer cette forme le long des fibres de cette fibration ([14]) et ce à l'aide de l'opérateur d'intégration $\oint_G$; nous obtenons

$$\oint_G (\rho^*(\alpha) \wedge \pi_G^*(\omega)) \in \Omega^p(M).$$

Un calcul simple nous donne l'égalité :

$$m(\alpha) = \oint_G (\rho^*(\alpha) \wedge \pi_G^*(\omega)).$$

Et puisque l'opérateur d'intégration le long des fibres commute avec d, nous en déduisons que m commute aussi avec d. ■

D'un autre côté, il a été établi dans [2] (théorème 2, p. 354) que m est surjectif et que son noyau s'identifie à $C_{\mathcal{G}}^*(M)$. Autrement dit, nous avons une suite exacte courte d'espaces vectoriels topologiques :

$$0 \to C_{\mathcal{G}}^*(M) \to \Omega_c^*(M) \xrightarrow{m} (\Omega_{\mathcal{G}c}^{\mathcal{G}s})^*(M) \to 0 \qquad (\epsilon)$$

Nous venons donc d'établir d'après le lemme qu'il s'agit en fait d'une suite exacte courte de complexes différentiels. On en déduit alors par passage à la cohomologie une suite exacte longue. Ceci achève la démonstration du théorème.

6. Illustration du théorème 5.5

Nous discutons un exemple $\tau : \mathcal{G} \to \mathcal{V}(M)$ d'action de l'algèbre de Lie compacte abélienne $\mathcal{G} := \mathbb{R}^2$ sur une 3-variété compacte M telle que toutes les $\mathcal{G}$-orbites soient compactes et que $H^1_\tau(M)) \neq 0$; ce n'est donc pas une $\mathcal{G}$-action propre.

Le tore hyperbolique (voir par exemple [11]) est une 3-variété compacte $M^3 = G_3/\Gamma$ avec Γ un sous-groupe discret cocompact du groupe de Lie G_3, celui-ci étant le groupe de Lie résoluble, connexe, simplement connexe dont l'algèbre de Lie $\mathcal{G}_3$ admet pour base $\{e_1, e_2, e_3\}$ avec les crochets : $[e_1, e_2] = 0$, $[e_1, e_3] = -e_1$, $[e_2, e_3] = e_2$. La trois variété M^3 est alors munie d'un parallélisme $\{X_1, X_2, X_3\}$ avec les crochets: $[X_1, X_2] = 0$, $[X_1, X_3] = -X_1$, $[X_2, X_3] = X_2$. Il existe donc une action de $\mathbb{R}^2$ sur M^3 telle que $\{X_1, X_2\}$ soit une base de champs de vecteurs fondamentaux. Les orbites de cette action sont des tores $\mathbb{T}^2$, et nous avons en fait un fibré localement trivial : $\mathbb{T}^2 \hookrightarrow M^3 \to S^1$. Tout de même l'action de $\mathbb{R}^2$ sur M n'est pas propre i.e. il n'existe pas d'action du tore $\mathbb{T}^2$ sur M ayant comme action infinitésimale l'action initiale de $\mathbb{R}^2$ sur M^3. En effet :

Considérons la famille 1-formes différentielles : $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ donnée par : $\alpha_i(X_j) = \delta_{ij}$ (symbole de Kronecker); c'est une base du $C^\infty(M)$-module $\Omega^1(M)$. Il est facile de vérifier qu'on a:

$$d\alpha_3 = 0 \;\;,\;\; L_{X_1}\alpha_1 = \alpha_3 \;\;,\;\; L_{X_3}\nu = 0.$$

Où $\nu := \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3$. Ainsi, α_3 est une 1-forme fermée et divergence : $\alpha_3 \in C^1_{\mathcal{G}}(M)$ (où $\mathcal{G}$ est l'algèbre de Lie abélienne $\mathbb{R}^2$). En plus, la 1-forme α_3 n'est pas exacte, car sinon il existe $f \in C^\infty(M)$ telle que : $\alpha_3 = df$, nous obtenons alors : $1 = X_3 f$, et par suite $\mathrm{Vol}_\nu(M) = \int_M (X_3 f)\nu$, et donc par application du théorème de Stokes et du fait que $\div_\nu X_3 = 0$ nous aurons $\mathrm{Vol}_\nu(M) = 0$, ce qui est imppossible. Ainsi $H^1_\tau(M) \neq 0$. D'où le résultat. ∎

Remarque. En appliquant à ce niveau le théorème 4.1, nous en déduisons aussi que le groupe Abelien $T(\mathcal{G}) \subset \mathrm{Diff}(M^3)$ engendré par les flots φ^X_t avec $X \in vect\{X_1, X_2\}$, muni de sa topologie compacte-ouverte-modifiée est non compact.

7. La classe divergence

Dans la suite exacte longue du théorème 5.2, l'homomorphisme $H^*(\Omega^{\mathcal{G}}(M)) \to H^{*+1}_\tau(M)$ n'est autre que l'homomorphisme connectant δ associé à la suite exacte courte (ϵ). Supposons que la variété M est non-compacte, nous obtenons alors une application injective $\delta : \mathbb{R} \hookrightarrow H^1_\tau(M)$.

Définition-Proposition. *Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie unimodulaire. Pour toute $\mathcal{G}$-variété propre M non-compacte telle que $M/\mathcal{G}$ soit compacte, la 1-classe de cohomologie divergence :*

$$\theta_{\mathcal{G}} := \delta 1 \in H^1_\tau(M)$$

est non nulle. On l'appellera classe divergence de la $\mathcal{G}$-variété M.

Propriétés.

1. Comment construire un représentant de la classe divergence ?
   Soit G un groupe de Lie unimodulaire, et M une G-variété propre non-compacte telle que M/G soit compact, il existe alors sur M une fonction

$\lambda \in C_c^\infty(M)$ telle que $\forall x \in M$ on a $\int_G \lambda(g^{-1}x)dg = 1$. La 1-forme $d\lambda$ est une 1-forme divergence fermée sur M, on a :

$$\theta_{\mathcal{G}}(M) = [d\lambda] \in H^1_\tau(M).$$

Exemple. Considérons l'action homogène naturelle de l'algèbre de Lie des matrices de trace nulle $\mathrm{sl}(n,\mathbb{R})$ sur l'espace homogène contractile $M = \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})/\mathrm{SO}(n)$: il existe $\lambda \in C_c^\infty(\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})/\mathrm{SO}(n))$ telle que pour tout $a \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$

$$\int_{\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})} \lambda(\overline{g^{-1}a})dg = 1.$$

on a $\theta_{\mathrm{sl}(n,\mathbb{R})}(\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})/\mathrm{SO}(n)) = [d\lambda] \neq 0$.

2. *Naturalité de la classe divergence :*
   Soient M, N deux $\mathcal{G}$-variétés propres non-compactes ; et soit $\varphi : M \to N$ une application propre et $\mathcal{G}$-équivariante.
   Alors : $H^1(\varphi_{\mathcal{G}})(\theta_{\mathcal{G}}(N)) = \theta_{\mathcal{G}}(M)$.

3. *Lien avec l'application classifiante de Abels*[1]:
   En utilisant le théorème principal de [1] (version différentiable), nous en déduisons que *"pour toute $\mathcal{G}$-variété propre comme ci-dessus (i.e. $\mathcal{G}$ unimodulaire, M non-compacte et $M/\mathcal{G}$ est compact), il existe une application $\mathcal{G}$-équivariante et propre $q : M \to G/K$"* (K étant un sous-groupe compact connexe maximal de G, la propreté de l'application q est due au fait que l'espace des feuilles $M/\mathcal{G}$ est compact). On en déduit alors par naturalité :

$$\theta_{\mathcal{G}}(M) = H^1(q_{\mathcal{G}})(\theta_{\mathcal{G}}(G/K)).$$

8. Lien avec la cohomologie différentiable d'un groupe

Soit G un groupe de Lie connexe unimodulaire non compact et K est un sous-groupe compact maximal (par exemple : $G = \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ et $K = \mathrm{SO}(n)$). La variété $M := G/K$ étant alors contractile, ses groupes de cohomologie à support compacte $H_c^r(M)$ sont tous nuls sauf en dimension maximale où on a $H_c^n(M) = \mathbb{R}$ ($n = \dim G - \dim K$). L'action homogène naturelle $\tau : \mathcal{G} \to \mathcal{V}(G/K)$ est celle donnée par : $\tau(h)_{\overline{g}} := \frac{d}{dt}_{|t=0} \overline{\exp(-th)g}$. C'est une action propre.
En utilisant la suite exacte longue du théorème 5.2, nous obtenons :

Théorème 8.1. *Soit G un groupe de Lie connexe unimodulaire non compact et K est un sous-groupe compact maximal. Alors on a un isomorphisme d'espaces vectoriels gradués :*

$$\delta : H^r(\Omega^{\mathcal{G}}(G/K)) \xrightarrow{\cong} H_\tau^{r+1}(G/K), \quad \textit{pour } r = 0, \dots, \dim(G/K) - 1$$

donné par :

$$\delta(\omega) := [\omega \wedge d\lambda]$$

où la fonction $\lambda \in C_c^\infty(G/K)$ est telle que $\int_G \lambda(g^{-1} \cdot x)dg = 1$, pour tout $x \in G/K$ (dg étant la mesure de Haar du groupe G).

On rappelle par ailleurs (voir par exemple [7][15][25]) que la cohomologie différentiable $H^*_d(G)$ du groupe G est la cohomologie du complexe

$$(C^*(G)\,,\,d)$$

avec $C^p(G) = C^\infty(G \times ... \times G)$ est l'espace des applications différentiables sur le produit p-fois de G, et la différentielle d est donnée par :

$$dc(g_1, ..., g_{p+1}) = c(g_2, ..., g_{p+1}) + \sum_{i=1}^{p} (-1)^i c(g_1, ..., g_i g_j, ..., g_{p+1}) + (-1)^{p+1} c(g_1, ..., g_p).$$

Selon un fameux théorème de Van Est (voir [7] th. 5.6 p. 279) *"la cohomologie des formes G-invariantes sur G/K est isomorphe à la cohomologie différentiable de G"*. En appliquant alors ce résultat, nous obtenons:

Théorème 8.2. *Soit G un groupe de Lie unimodulaire, et soit K un sous-groupe compact maximal de G. Alors, pour tout $p = 1, \dots, \dim(G/K)$ on a:*

$$H^p_\tau(G/K) \cong H^{p-1}_d(G).$$

Corollaire 8.3. *Soit G un groupe de Lie contractile et unimodulaire. Alors:*

$$H^p_\tau(G) \cong H^{p-1}(\mathcal{G})$$

où $H^*(\mathcal{G})$ est la cohomologie de son algèbre de Lie $\mathcal{G}$ et $\tau(h)$ le champ de vecteurs invariant à droite sur G obtenu par translation à droite de $-h \in \mathcal{G}$.

Exemples.

1. Soit G le goupe des matrices triangulaires supérieurs à diagonale égale à 1. Alors: $H^p_\tau(G) \cong H^{p-1}(\mathcal{G})$.

2. Supposons $M = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{G}$ est l'algèbre de Lie abélienne $\mathbb{R}^n$ opérant sur M par l'action canonique $\tau : \mathbb{R}^n \to \mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ donnée par $\tau(e_i) = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Alors pour $p = 1, \dots, n$. on a:
$$H^p_\tau(\mathbb{R}^n) = \bigwedge^{p-1} \mathbb{R}^n.$$

Remerciments. *Mes remerciements vont à Moulay-Tahar Benameur et Aziz El Kacimi pour les discussions enrichissantes que nous avons eues.*

Références

[1] Abels, H., *Parallelizability of Proper Actions, Global K-slices and Maximal Compact Subgroups*, Math. Ann. **212** (1974), 1–19.

[2] Abouqateb, A., *Courants invariants par une action propre*, Manuscripta math. **98** (1999), 349–362.

[3] Abouqateb, A., et M.-T. Benameur, *Cohomologies continues pour les actions propres*, Annales des Sciences Mathématiques du Quebec **30** (2006), á paraître.

[4] Abouqateb, A., et A. El Kacimi, *Fonctionnelles invariantes et courants basiques*, Studia Mathematica **143** (2000), 199–219.

[5] Alekseevsky, D. V., and P. W. Michor, *Differential Geometry of $\mathcal{G}$-Manifolds*, Diff. Geom. and its Appl. **5** (1995), 371–403.

[6] Benoist, Y., *Actions propres sur les epaces homogènes réductifs*, Ann. of Math. **144** (1996), 315–376.

[7] Borel, A., and N. Wallach, "Continuous Cohomology, Discrete Subgroups, and Representations of Reductive Groups," Annals of Mathematics Studies **94**, Princeton Univ. Press, 1980, xvii+387 pp.

[8] Bott, R., and L. W. Tu, "Differential Forms in Algebraic Topology, " Springer-Verlag, 1982.

[9] Bourbaki, N., "Topologie générale, Chapitre 3-4," Paris, Hermann, 1960.

[10] Duistermaat, J. J., and J. A. Kolk, "Lie Groups," Springer-Verlag, 2000.

[11] El Kacimi Alaoui, A., *Invariants de certaines actions de Lie, Instabilité du caractère Fredholm*, Manuscripta math. **74** (1992), 143–160.

[12] —, *Sur la cohomologie feuilletée*, Compositio Mathematica **49** (1983), 195–215.

[13] Godbillon, C., "Eléments de topologie algébrique," Hermann, Paris, 1971.

[14] Greub, W., S. Halperin, and R. Vanstone, "Connections Curvatures and Cohomology," Vol. II, Academic Press, 1972.

[15] Haefliger, A., *Differentiable Cohomology*, in: "Differential Topology, C.I.M.E., Varenna 1976," (1979), 21–70.

[16] Herz, C. S., *Functions which are Divergences*, Amer. Jour. Math. **92** (1970), 640–656.

[17] Illman, S., *Every proper smooth action of a Lie group is equivalent to a real analytic action: a contribution to Hilbert's fifth problem*, in: F.Quinn, ed., "Prospects in topology," Princeton U. Press, Ann. of Math. Stud. **138** (1995), 189–220.

[18] Kobayashi, T., *Criterion for Proper Actions on Homogeneous Spaces of Reductive Groups*, J. of Lie Theory **6** (1996), 147–163.

[19] Koszul, J. L., "Lectures on Groups of Transformations,", Notes by R. R. Simha and R. Sridharan, Tata Inst. of Fund. Reserch. Bombay (1965).

[20] Kulkarni, S., *Proper Actions and Pseudo-Riemannian Space Forms*, Advances in Mathematics **40** (1981), 10–51.

[21] Lipsman, R., *Proper actions and cocompactness condition*, J. of Lie Theory **5** (1995), 25–39.

[22] Molino, P., "Riemannian Foliations," Birkhäuser, 1988.

[23] Palais, R. S., "A Global Formulation of the Lie Theory of Transformation Groups," Mem. Amer. Math. Soc. **22**, 1957.

[24] —, *On the existence of slices for non-compact Lie groups*, Ann. of Math. bf 73 (1961), 295–323.

[25] Palais, R. S., and A. E. Stewart, *The Cohomology of Differentiable Transformation Groups*, Amer. J. Math. **83** (1961), 623–644.

[26] Postnikov, M. M., "Geometry VI. Riemannian Geometry," Encyclopaedia of Mathematical Sciences **91**, Springer, 2001.

[27] Rummler, H., *Quelques notions simples en géométrie riemannienne et leurs applications aux feuilletages compacts*, Comm. Math. Helv. **54** (1979), 224–239.

[28] Sussmann, H. J., *Orbits of Families of Vector Fields and Integrability of Distributions*, Trans. Amer. Math. Soc. **180** (1975), 171–188.

[29] Stephan, P., *Accessible Sets, Orbits, and Foliations with Singularities*, Proc. London Math. Soc. (3) **29** (1974), 699–713.

[30] Zeghib, A., *On Affine Actions of Lie Groups*, Math. Z. **227** (1998), 245–262.

[31] Zeghib, A., *The Identity Component of the Isometry Group of a Compact Lorentz Manifold*, Duke Math. J. **92** (1998), 321–333.

[32] Ziemian, B., *On G-invariant distributions*, J. of Diff. Equations **35** (1980), 66–86.

Abdelhak Abouqateb
Université Cadi-Ayyad,
Faculté des Sciences et Techniques,
B.P. 549 Gueliz
40000 Marrakech-Maroc.
abouqateb@fstg-marrakech.ac.ma
Fax : 00 212 24 43 31 70

Received June 1, 2006
and in final form November 30, 2006