Journal of Lie Theory
Volume **17** (2007) 617–624

Sur la réductibilité des variétés des lois d'algèbres de Leibniz complexes

José María Ancochea-Bermúdez*, **Juan Margalef-Bentabol**, **et Jonathan Sánchez-Hernández**

Communicated by E. B. Vinberg

Abstract. Dans cette note, en utilisant les notions de déformation et contraction des lois d'algèbres de Lie et Leibniz, on montre que les variétés algébriques des lois d'algèbres de Leibniz complexes et de Leibniz nilpotentes de dimension supérieure ou égale à 3 sont réductibles.
Mathematics Subject Classification 2000: 17A32.
Key Words and Phrases: Algèbre de Leibniz, déformation, rigidité, contraction.

1. Définitions et propriétés préliminaires

Le but de ce travail est de montrer la réductibilité des variétés d'algèbres de Leibniz et Leibniz nilpotentes, que l'on dénotera respectivement par Lei^n et LeiN^n. D'abord, on classifie les algèbres de Leibniz nilpotentes de dimension 3 sur le corps des nombres complexes. Ceci, nous permet de déterminer les composantes irréductibles de la variété LeiN^3 et il en résulte que la variété est formée par deux composantes. Les autres algèbres résultent de limites par contraction des algèbres rigides ou des familles rigides définissant les composantes irréductibles. De plus, on caractérise les lois d'algèbre de Lie rigides sur la variété L^n de lois d'algèbres de Lie qui sont rigides sur la variété Lei^n.

Definition 1.1. Une loi d'algèbre de Leibniz μ sur $\mathbb{C}$ est une application bilinéaire $\mu : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ qui vérifie l'identité

$$\mu(x, \mu(y, z)) = \mu(\mu(x, y), z) - \mu(\mu(x, z), y). \tag{1}$$

On appelle algèbre de Leibniz à toute paire $(\mathbb{C}^n, \mu)$ où μ désigne une loi d'algèbre de Leibniz.

Donéravant, la loi sera identifiée à son algèbre et les produits non écrits seront supposés nuls.

---

* Le premier auteur a été soutenu par le projet de recherche MTM2006-09152 du Ministerio de Ecucación y Ciencia.

ISSN 0949–5932 / $2.50

On remarquera que, lorsque μ est anticommutatif, c'est-à-dire, telle que $\mu(x,y) = -\mu(y,x)$, cette relation est équivalente à la relation de Jacobi

$$\mu(x,\mu(y,z)) + \mu(y,\mu(z,x)) + \mu(z,\mu(x,y)) = 0, \tag{2}$$

puisque (1) consiste à reécrire la relation de Jacobi en mettant x à la première place (resp. z à la dernière place) dans chaque terme.

Soit $\mathfrak{l} = (\mathbb{C}^n, \mu)$ une algèbre de Leibniz, on définit la suite centrale descendante à droite comme

$$\mathcal{C}^1(\mathfrak{l}) = \mathfrak{l}, \mathcal{C}^2(\mathfrak{l}) = \mu(\mathfrak{l},\mathfrak{l}), \ldots, \mathcal{C}^{k+1}(\mathfrak{l}) = \mu(\mathcal{C}^k(\mathfrak{l}),\mathfrak{l}), \ldots,$$

avec $k \in \mathbb{N}$.

Definition 1.2. Une algèbre de Leibniz $\mathfrak{l}$ est nilpotente s'il existe $k \in \mathbb{N}$ telle que $\mathcal{C}^k(\mathfrak{l}) = \{0\}$.

Soit $\mathfrak{l} = (\mathbb{C}^n, \mu)$ une algèbre de Leibniz nilpotente. Pour tout $x \in \mathbb{C}^n$ on définit l'endomorphisme $R_x : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ de la façon suivante:

$$R_x(y) = \mu(y,x), \quad \forall y \in \mathbb{C}^n.$$

Il est facile de voir que R_x est un endomorphisme nilpotent. De plus, si x est un vecteur non nul dans $\mathfrak{l} \setminus \mathcal{C}^2(\mathfrak{l})$, $s_\mu(x) = (s_1(x), \ldots, s_k(x))$ représente la suite ordonnée $(s_1 \geq s_2 \geq \ldots \geq s_k)$ des exposants de similitude de l'opérateur nilpotent R_x. Ordonnons lexicographiquement l'ensemble de ces suites $s_\mu(x)$ et notons $s(\mu)$ la borne supérieure des $s_\mu(x)$ pour x élément de $\mathfrak{l} \setminus \mathcal{C}^2(\mathfrak{l})$. On en déduit que $s(\mu)$ est, à isomorphisme près, un invariant de la classe d'isomorphie de l'algèbre $\mathfrak{l}$, qu'on appellera par la *suite caractéristique* de $\mathfrak{l}$. Si $x \in \mathfrak{l} \setminus \mathcal{C}^2(\mathfrak{l})$ est tel que $s_\mu(x) = s(\mu)$, on dira que x est un vecteur caractéristique de l'algèbre.

On désignera par Lei^n l'ensemble des lois d'algèbres de Leibniz sur $\mathbb{C}^n$ et par LeiN^n l'ensemble de lois d'algèbres de Leibniz nilpotentes sur $\mathbb{C}^n$.

Soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de $\mathbb{C}^n$. On peut identifier toute algèbre de Leibniz μ avec les constantes de structure sur une base donnée. De l'identité (1) on obtient que les coordonées définies par $\mu(e_i, e_j) = a_{ij}^k e_k$ sont des solutions du système:

$$a_{jk}^l a_{il}^m - a_{ij}^l a_{lk}^m + a_{ik}^l a_{lj}^m = 0, \ 1 \leq i,j,k,m \leq n \tag{3}$$

D'autre part, les conditions de nilpotence sont aussi polynomiales. Ainsi Lei^n et LeiN^n ont une structure de variété algébrique plongée dans $\mathbb{C}^{n^3}$.

2. Classification des algèbres de Leibniz nilpotentes de dimension 3

Soit $\mathfrak{l} = (\mathbb{C}^3, \mu)$ une algèbre de Leibniz nilpotente. En utilisant l'invariant de similitude précedent, on en déduit que les possibles suites caractéristiques de $\mathfrak{l}$ sont $\mathcal{C}(\mathfrak{l}) \in \{(3),(2,1),(1,1,1)\}$.

1. Si $s(\mathfrak{l}) = (3)$, il y a un vecteur caractéristique e_1 et une base $\{e_1, e_2, e_3\}$ telle que

$$\mu(e_1, e_1) = e_2,$$
$$\mu(e_2, e_1) = e_3.$$

Comme $\mu(x,e_2)=\mu(x,\mu(e_1,e_1))=\mu(\mu(x,e_1),e_1)-\mu(\mu(x,e_1),e_1)=0$, il en résulte que $R_{e_2}\equiv 0$. Les relations de Leibniz pour (e_1,e_2,e_1), (e_2,e_2,e_1) et (e_3,e_2,e_1) montrent que $\mu(e_1,e_3)=\mu(e_2,e_3)=\mu(e_3,e_3)=0$. Dans ce cas, il existe une seule algèbre de Leibniz ayant pour produit μ_1 et définie par la relation:

$$\begin{aligned}\mu_1(e_1,e_1)&=e_2,\\ \mu_1(e_2,e_1)&=e_3.\end{aligned}$$

2. Si $s(\mathfrak{l})=(2,1)$, dans ce cas il y a deux possibilités:

   (a) Il existe un vecteur caractéristique e_1 tel que $\mu(e_1,e_1)\neq 0$.

   (b) Pour tout vecteur caractéristique x, la relation $\mu(x,x)=0$ est satisfaite.

   Dans le premier cas (a), on peut trouver une base $\{e_1,e_2,e_3\}$ telle que

   $$\mu(e_1,e_1)=e_2.$$

   Le condition de Leibniz pour (x,e_1,e_1) donne $\mu(x,e_2)=0$. La nilpotence de l'opérateur R_{e_3} et la condition de Leibniz sur (e_1,e_1,e_3) et sur (e_1,e_3,e_1) impliquent que

   $$\begin{aligned}\mu(e_3,e_1)&=ae_2,\\ \mu(e_3,e_3)&=be_2.\end{aligned}$$

   Si on fait un changement de base $\{x_1,x_2,x_3\}$ tel que $\mu(x_2,x_1)=0$, $\mu(x_2,x_3)=0$ et $\mu(x_3,x_1)=0$, on reste dans le famille d'algèbres de Leibniz et la nulité ou la non nulité de a et b restent dans ce changement de base. Alors, si $a\neq 0$, le changement de base $x_1=e_1$, $x_2=e_2$ et $x_3=\frac{1}{a}e_3$ permet de supposer que $a=1$, et on obtient la famille d'algèbres de Leibniz non isomorphes $\mu_{2,b}$ donnée par:

   $$\begin{aligned}\mu_{2,b}(e_1,e_1)&=e_2,\\ \mu_{2,b}(e_3,e_3)&=be_2,\\ \mu_{2,b}(e_1,e_3)&=e_2.\end{aligned}$$

   Si $a=0$ et $b\neq 0$ on peut supposer que $b=1$. Dans ce cas, la seule algèbre μ_3 qu'on obtient est définie par:

   $$\begin{aligned}\mu_3(e_1,e_1)&=e_2,\\ \mu_3(e_3,e_3)&=e_2.\end{aligned}$$

   Si $a=b=0$ il en résulte l'algèbre μ_4 definie par:

   $$\mu_4(e_1,e_1)=e_2$$

   Dans le cas (b), il existe une base $\{e_1,e_2,e_3\}$ telle que $\mu(e_2,e_1)=e_3$. La nilpotence de R_{e_3}, R_{e_2} et le fait qu'il n'existe pas de vecteur caractéristique x tel que $\mu(x,x)\neq 0$ impliquent que l'algèbre est en fait une algèbre de Lie, isomorphe à l'algèbre de Heisenberg de dimension 3. La loi de cette algèbre μ_5 est donnée par: $\mu_5(e_1,e_2)=-\mu_5(e_2,e_1)=-e_3$.

3. Si $s(\mathfrak{l})=(1,1,1)$, il en résulte que μ_6 est l'algèbre abélienne.

L'analyse précédente montre le résultat suivant:

Theorem 2.1. *Toute algèbre de Leibniz complexe de dimension 3 nilpotente est isomorphe à l'une des algèbres μ_i, avec $i = 1, 3, 4, 5, 6$ ou $\mu_{2,b}$, $b \in \mathbb{C}$.*

3. Contractions et déformations des algèbres de Leibniz

Soit $\mathcal{L}^n$ la variété des lois d'algèbres de Lie L^n, ou bien l'une des variétés Lei^n ou LeiN^n. Si $\mu_0 \in \mathcal{L}^n$, on notera par $\mathcal{O}(\mu_0)$ l'orbite de μ_0 relative à l'action du groupe général linéaire $GL(n, \mathbb{C})$ sur $\mathcal{L}^n$:

$$\begin{array}{rcl} GL(n,\mathbb{C}) \times \mathcal{L}^n & \longrightarrow & \mathcal{L}^n \\ (f, \mu_0) & \longmapsto & f^{-1} \circ \mu_0 \circ (f \times f) \end{array}$$

où $f^{-1} \circ \mu_0 \circ (f \times f)(x, y) = f^{-1}(\mu_0(f(x), f(y)))$.

Soit C une composante irréductible de $\mathcal{L}^n$ passant par μ_0. Alors $\mathcal{O}(\mu_0) \subseteq C$. On peut munir la variété $\mathcal{L}^n$ avec deux topologies non-équivalentes d'une façon assez naturelle: soit la topologie métrique induite par le plongement de $\mathcal{L}^n$, soit la topologie de Zariski, moins fine que la précédente. Comme C est fermée pour la topologie de Zariski, $\overline{\mathcal{O}(\mu_0)}^Z$, l'adhérence de l'orbite de μ_0 au sens de Zariski est aussi contenue dans C.

En analogie avec les algèbres de Lie, on peut définir formellement une notion de limite dans la variété des lois $\mathcal{L}^n$ de la façon suivante: Soient $\mu \in \mathcal{L}^n$ et $f_t \in GL(n, \mathbb{C})$ une famille d'endomorphismes non-singuliers dépendants d'un paramètre continu t. Si pour toute paire $x, y \in \mathbb{C}^n$ la limite

$$\mu'(x, y) := \lim_{t \to 0} f_t^{-1} \circ \mu(f_t(x), f_t(y)) \tag{4}$$

existe, alors μ' vérifie les conditions de $\mathcal{L}^n$, et pourtant μ' est une loi d'algèbre de $\mathcal{L}^n$, appellée contraction de μ par $\{f_t\}$. En utilisant l'action du groupe $GL(n, \mathbb{C})$ sur la variété $\mathcal{L}^n$, il est facile de voir qu'une contraction de μ correspond à un point de la clôture de l'orbite $\mathcal{O}(\mu)$.

C'est évident que le changement de base $e_i' = te_i$, $i = 1, .., n$ induit une contraction de toute algèbre de $\mathcal{L}^n$ sur l'algèbre de Leibniz abélienne. De plus, toute contraction non-triviale $\mu \longrightarrow \mu'$ vérifie les inégalités suivantes:

$$\dim \mathcal{O}(\mu) > \dim \mathcal{O}(\mu'), \qquad \dim Z_R(\mu) \leq \dim Z_R(\mu'),$$
$$s(\mu') \leq s(\mu) \text{ (dans le cas nilpotent)},$$

où

$$Z_R(\mu) = \{x \in \mathbb{C}^n \,:\, \mu(y, x) = 0,\ \forall y \in \mathbb{C}^n\}.$$

Ainsi toute composante C contenant μ_0 contient aussi toutes les contractions de μ_0.

Definition 3.1. Une déformation de μ_0 sur $\mathcal{L}^n$ est une série formelle à un paramètre t

$$\mu_t = \mu_0 + \sum_{i=1}^{\infty} t^i \varphi_i$$

où φ_i sont des applications bilinéaires $\varphi_i : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, telles que μ_t vérifie les identités de $\mathcal{L}^n$.

Soient μ_t^1 et μ_t^2 deux déformations de la loi μ_0 sur $\mathcal{L}^n$. On dit que μ_t est équivalente à μ_t^2 s'il existe un isomorphisme linéaire Φ_t de $\mathbb{C}^n$

$$\Phi_t = \mathrm{Id} + \sum_{i=1}^{\infty} t^i g_i$$

où $g_i \in Gl(n, \mathbb{C})$, tel que

$$\mu_t^2(X,Y) = \Phi_t(\mu_t^1(\Phi_t(X), \Phi_t(Y)))$$

pour toute $X, Y \in \mathbb{C}^n$.

Une déformation μ_t de μ_0 sur $\mathcal{L}^n$ est appellée trivial si μ_t est équivalente à μ_0.

Definition 3.2. Une loi $\mu_0 \in \mathcal{L}^n$ est rigide sur $\mathcal{L}^n$ si toute déformation de μ_0 sur $\mathcal{L}^n$ est équivalente à μ_0. C'est à dire, $\mu_0 \in \mathcal{L}^n$ est rigide sur $\mathcal{L}^n$ si l'orbite $\mathcal{O}(\mu_0)$ est ouverte pour la topologie de Zariski ([5] et [6]).

Il en résulte en particulier que les algèbres rigides ne sont pas obtenables par contraction, et que la rigidité de $\mu_0 \in \mathcal{L}^n$ dans $\mathcal{L}^n$ implique que $\overline{\mathcal{O}(\mu_0)}^Z$ est une composante irréductible de la variété $\mathcal{L}^n$.

4. La variété LeiN^3

Dans ce paragraphe, en utilisant les notions vues dans le paragraphe précédent, on détermine les composantes irréductibles de la variété LeiN^3.

1. *Le loi μ_1 (sec. 2) est rigide dans* LeiN^3. En effet, c'est la seule algèbre de Leibniz nilpotente avec suite caractéristique maximale.

   Comme $\dim(Z_R(\mu_1)) = 2$, $\dim(Z_R(\mu_{2,b})) = 1$ (dans le cas $b \neq 0$), $\dim(Z_R(\mu_3)) = 1$ et $\dim(Z_R(\mu_5)) = 1$, les algèbres $\mu_{2,b}$ ($b \neq 0$), μ_3 et μ_5 ne sont pas des contractions de μ_1.

2. *Les seules contractions de μ_1 sont, à isomorphisme près, isomorphes à $\mu_{2,0}$, μ_4 et μ_6.* Il en suffit de considérer les familles d'automorphismes de $\mathbb{C}^3$ suivantes:

$$\begin{cases} f_t(e_1) = te_1 \\ f_t(e_2) = t^2 e_2 \\ f_t(e_3) = e_2 + te_3 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} g_t(e_1) = te_1 \\ g_t(e_2) = t^2 e_2 \\ g_t(e_3) = e_3, \end{cases}$$

   pour obtenir les contractions correspondantes de μ_1 sur $\mu_{2,0}$ et μ_4.

3. *Les algèbres $\mu_{2,0}$, μ_3, μ_4, μ_5 et μ_6 appartiennent à la clôture* $\overline{\bigcup_{b \in \mathbb{C}-0} \mathcal{O}(\mu_{2,b})}^Z$ de l'union des orbites des algèbres $\mu_{2,b}$. En effet, si on de considère les applications bilinéaires définies par:

$$\varphi_1(e_3,e_3) = e_2, \quad \varphi_2(e_1,e_3) = e_2,$$
$$\varphi_4(e_1,e_1) = e_1, \quad \varphi_3(e_3,e_3) = \varphi_3(e_1,e_3) = e_2,$$

   et les droites données par $\mu_{2,0} + t\varphi_1$, $\mu_3 + t\varphi_2$, $\mu_4 + t\varphi_3$ et $\mu_5 + t\varphi_4$ contenues dans LeiN^3, on vérifie sans difficulté que pour t non nul, les algèbres correspondantes sont isomorphes à des lois de la famille $\{\mu_{2,b}\}_{b\neq 0}$. On en déduit que tout voisinage des algèbres précedentes et les orbites des éléments de la famille ont une intersection non vide.

De façon analogue, on peut montrer que les seules contractions de μ_3 et $\mu_{2,0}$ sont, à isomorphisme près, μ_4 et μ_6, et que la seule contraction de μ_4 et μ_5 est μ_6.

D'après cette étude, on peut classifier les composantes de la variété comme suit:

Theorem 4.1. *La variété* LeiN^3 *est l'union de deux composantes irréducibles* $\overline{\mathcal{O}(\mu_1)}^Z$ *et* $\overline{\bigcup_{b\in\mathbb{C}} \mathcal{O}(\mu_{2,b})}^Z$.

Remark 4.2. Dans la référence [1], les auteurs affirment que la loi λ_5 de LeiN^3 définie (dans la base $\{x_1, x_2, x_3\}$) par

$$\lambda_5(x_2, x_2) = \lambda_5(x_3, x_2) = \lambda_5(x_2, x_3) = x_1,$$

est rigide. Cependant, λ_5 est isomorphe à μ_3. Pour s'en convaincre il suffit de faire le changement de base donné par

$$e_1 = x_2, \quad e_2 = x_1, \quad e_3 = -ix_2 + ix_3,$$

et il en résulte immédiament que μ_3 se déforme dans des lois de la famille $\{\mu_{2,b}\}$.

Remark 4.3. LeiN^2 est irreducible et sa seule composante irreducible est $\overline{\mathcal{O}(\mu)}^Z$, μ étant la loi définie sur la base $\{e_1, e_2\}$ par:

$$\mu(e_1, e_1) = e_2.$$

5. La réductibilité des variétés LeiN^n et Lei^n

Si $\mu_0 \in \mathrm{LeiN}^n$ est une loi de suite caractéristique $s(\mu_0) = (n)$, on peut trouver une base $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ de $\mathbb{C}^n$ telle que $\mu(x_i, e_1) = x_{i+1}$ pour $i = 1, \ldots, n-1$. On a donc que $\{x_2, \ldots, x_n\}$ est une base de l'algèbre dérivée $\mathcal{C}^2(\mathfrak{l})$, et $\{e_1, x_2, \ldots, x_n\}$ est une base de $\mathbb{C}^n$. Comme $\mu_0(e_1, e_1) = a^2x_2 + \ldots + a^nx_n$ (avec $a^2 \neq 0$, dans le cas contraire $\dim(\mathrm{Im}(R_{e_1})) < n-1$ et e_1 ne serait pas un vecteur caractéristique), si on prend $e_2 = \mu_0(e_1, e_1)$ et $e_k = \mu_0(e_{k-1}, e_1)$ pour $k = 3, \ldots, n$, on vérifie que $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ est une base de $\mathbb{C}^n$ pour laquelle $\mu_0(e_i, e_1) = e_{i+1}$ pour $i = 1, \ldots, n-1$ et $\mu_0(e_n, e_1) = 0$. D'autre part,

$$\mu_0(x, e_2) = \mu_0(x, \mu(e_1, e_1)) = \mu_0(\mu_0(x, e_1), e_1) - \mu_0(\mu_0(x, e_1), e_1) = 0,$$

alors $R_{e_2} \equiv 0$. Si de plus on suppose que pour $k < n$, la relation $R_{e_k} \equiv 0$ soit vérifie, alors $\mu_0(x, e_{k+1}) = \mu_0(x, \mu(e_k, e_1)) = \mu_0(\mu_0(x, e_k), e_1) - \mu_0(\mu_0(x, e_1), e_k) = 0$, d'où $R_{e_{k+1}} \equiv 0$. On a pourtant démontré le résultat suivant:

Proposition 5.1. *La seule algèbre de Leibniz nilpotente de dimension* n *et suite caractéristique* $s(\mu_0) = (n)$ *est isomorphe à* μ_0, *oú* $\mu_0(e_i, e_1) = e_{i+1}$ *pour* $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Remark 5.2. La loi μ_0 vérifiant la condition $\dim(\mathcal{C}^i(\mu_0)) - \dim(\mathcal{C}^{i+1}(\mu_0)) = 1$ pour tout $i = 1, \ldots, n$ est appelée nul-filiforme dans la référence [4].

Comme μ_0 est la algèbre de Leibniz nilpotente ayant une suite caractéristique maximale, alors elle est rigide et $\overline{\mathcal{O}(\mu_0)}^Z$ constitue une composante irréducible de la variété LeiN^n. D'autre part, si μ est une algèbre de Lie non abélienne, $\dim(Z(\mu)) \leq n-2$ et $\dim(Z_R(\mu_0)) = n-1$ impliquent que μ n'est pas une contraction de μ_0. In en résulte le théorème suivant:

Theorem 5.3. *La variété* LeiN^n *pour* $n \geq 3$ *est réductible.*

Proposition 5.4. *Une algèbre de Lie de centre non nul et non parfaite* ($\mathcal{C}^2(\mathfrak{l}) \neq \mathfrak{l}$) *n'est pas rigide sur* Lei^n.

Proof. Consideront μ une algèbre de Lie rigide sur L^n de centre non nul. Si on considère un vecteur $x \notin \mathcal{C}^2(\mathfrak{l})$ de l'algèbre de Lie et y un vecteur non nul du centre, alors on considère la droite donnée par $\mu + t\varphi$, où φ une application bilinéaire dont le seul produit non nul est $\varphi(x,x) = y$. Si $t \neq 0$, $\mu + t\varphi$ est une algèbre de Leibniz nilpotente qui n'est pas une algèbre de Lie. $\mu + t\varphi$ ne peut alors être isomorphe à la loi μ. ■

Soit $\mathfrak{l} = (\mathbb{C}^n, \mu)$ une algèbre de Leibniz. Il est clair que $Z_R(\mu)$ est un idéal de $\mathfrak{l}$ qui contient les éléments de la forme $\mu(x,y) + \mu(y,x)$, $\mu(x,x)$ et $\mu(\mu(x,y), \mu(y,x))$, où $x, y \in \mathbb{C}^n$. Pourtant, $\mathfrak{l}/Z_R(\mu)$ est une algèbre de Lie, ce qui montre l'affirmation suivante:

Toute loi d'algèbre de Leibniz qui n'est pas une algèbre de Lie vérifie la condition $Z_R(\mu) \neq 0$.

Theorem 5.5. *Une algèbre de Lie sans centre rigide sur* L^n *est rigide sur* Lei^n.

Proof. Soit μ une algèbre de Lie rigide sur L^n sans centre. Si $\mu' \in \mathrm{LeiN}^n$ n'est pas une algèbre de Lie, $Z_R(\mu') \neq 0$ et alors μ n'est pas une contraction de μ. D'apres la rigidité de μ dans L^n, μ_t est isomorphe à μ. ■

Comme pour $n \geq 2$ ils existent des algèbres rigides sur L^n sans centre et toute contraction d'une algèbre de Lie est aussi une algèbre de Lie, alors (du théorème 4) on obtient:

Corollary 5.6. *La variété* Lei^n *est réductible pour* $n \geq 2$.

Remark 5.7. La variété Lei^2 est union de deux composantes irréductibles $\overline{\mathcal{O}(\varphi_1)}^Z$ et $\overline{\mathcal{O}(\varphi_2)}^Z$, où les lois sont definies dans une base $\{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{C}^2$ par $\varphi_1(e_1, e_2) = -\varphi_1(e_2, e_1) = e_2$ (algèbre de Lie) et $\varphi(e_2, e_1) = e_2$.

Remerciements: Les auteurs remercient le rapporteur pour ses commentaires et interventions constructives lors de la révision de ce manuscrit.

References

[1] Albeverio, S., B. A. Omirov, and I. S. Rakhimov, Varieties of nilpotent complex Leibniz algebras of dimension less then five, Comm. Algebra **33** (2005), 1575–1585.

[2] Ancochea, J. M., et M. Goze, *Sur la classification des algèbres de Lie nilpotentes de dimension* 7, C.R.A.S. **302** (1986), 611–613.

[3] Ayupov, Sh. A., and B. A. Omirov, *On Leibniz algebras. Algebra and Operators Theory*, In: Proccedings of the Colloquium in Tashkent 1997, Kluwer Acad. Publ. 1998, 1–12.

[4] Ayupov, Sh. A., and B. A. Omirov, *On some classes of nilpotent Leibniz algebras*, Siberian Math. J. **42** (2001), 15–24.

[5] Balavoine, D., *Déformations et rigidité géométrique des algèbres de Leibniz*, Comm. Algebra **24** (1996), 1017–1034.

[6] Gerstenhaber, M., *On the deformation of rings and algebras*, Ann. Math. **79** (1964), 59–103.

[7] Loday, J. L., *Une version non commutative des algèbres de Lie: les algèbres de Leibniz*, Ens. Math. **39** (1993), 269–293.

[8] Rakhimov, I. S., *On degenerations of finite-dimensional nilpotent complex Leibniz algebras*, J. Mat. Sciences **136** (2006), 3980–3983.

José María Ancochea Bermúdez
et Juan Margalef Bentabol
Departamento de Geometría
y Topología
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
Plaza de Ciencias, 3 28020 Madrid
ancochea@mat.ucm.es

Jonathan Sánchez Hernández
Departamento de Geometría
y Topología
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
Plaza de Ciencias, 3 28020 Madrid
jnsanchez@mat.ucm.es

Received May 14, 2007
and in final form June 26, 2007