Journal of Lie Theory
Volume **17** (2007) 583–590

Deux résultats autour du théorème de restriction de Chevalley

Charles Torossian

Communicated by J. Ludwig

Résumé. We use Dunkl's operators to give an elementary proof of the surjectivity in the Chevalley's restriction theorem. In the second part of this article we describe the image of the invariants by the restriction map in the case of Takiff algebras, there are some similarities with super Lie algebras. We extend this result to Takiff symmetric space.
Mathematics Subject Classification 2000 : 17B, 17B60, 22E, 53C35, 57S.
Keywords and Phrases : Dunkl operator, Chevalley's restriction theorem.

1. Espaces symétriques et opérateurs de Dunkl

1.1. Rappels sur les opérateurs de Dunkl.

Soit G un groupe de Lie semi-simple réel à centre fini et K un sous-groupe compact maximal. On note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G, $\mathfrak{k}$ celle de K et $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ la décomposition de Cartan associée. Soit $\mathfrak{a}$ un sous espace de Cartan dans $\mathfrak{p}$, Δ le système de racines associé, Σ le système des racines indivisibles de Δ et W le groupe de Weyl. On note $S[\mathfrak{p}]$ et $S[\mathfrak{a}]$ les algèbres symétriques de $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{a}$. On note $S[\mathfrak{p}]^K$ les éléments $K-$invariants de $S[\mathfrak{p}]$ et $S[\mathfrak{a}]^W$ les éléments $W-$invariants de $S[\mathfrak{a}]$. On notera par $S(\mathfrak{p})$ (resp. $S(\mathfrak{a})$) le corps des fractions de $S[\mathfrak{p}]$ (resp. $S(\mathfrak{a})$) et par $S(\mathfrak{p})^K$ (resp. $S(\mathfrak{a})^W$) les fractions K-invariantes (resp. W-invariantes).

La décomposition, via la forme de Killing, $\mathfrak{p} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^\perp$ permet de définir l'homomorphisme de restriction de $S[\mathfrak{p}]^K$ dans $S[\mathfrak{a}]^W$.

Pour $\alpha \in \Sigma$ on note r_α la réflexion par rapport à la coracine H_α c'est à dire que l'on a

$$r_\alpha(H) = H - \frac{2\alpha(H)}{\alpha(H_\alpha)} H_\alpha.$$

On note aussi $k_\alpha = \frac{1}{2}(m_\alpha + m_{2\alpha})$ avec m_α la multiplicité de la racine α.
Pour $\xi \in \mathfrak{a}$ on définit T_ξ l'opérateur de Dunkl [2] sur $\mathfrak{a}$ par :

$$T_\xi = \partial_\xi + \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Sigma} k_\alpha \alpha(\xi) \frac{1 - r_\alpha}{\alpha(.)}.$$

ISSN 0949–5932 / $2.50

Alors T_ξ est bien défini sur les fonctions polynomiales sur $\mathfrak{a}$; il est de degré -1. Ces opérateurs ont des propriétés remarquables que nous résumons (cf. [2], [4]).

1. Ils commutent deux à deux, ce qui permet de définir $p(T)$ pour p dans l'algèbre symétrique $S[\mathfrak{a}]$. Ce point est assez difficile et est dû à Dunkl (d'autres démonstrations existent dues à Opdam et Heckman).
2. Pour $p \in S[\mathfrak{a}]^W$, l'opérateur $p(T)$ est un opérateur différentiel dans l'espace des fonctions W-invariantes. Ce point est clairement facile.
3. Pour P un élément de $S[\mathfrak{p}]^K$ on note $\partial(P)$ l'opérateur différentiel K-invariant sur $\mathfrak{p}$ associé, alors la partie radiale de $\partial(P)$ est égale à l'action de $p(T)$ sur les éléments W-invariants, où p est est la restriction de P à $\mathfrak{a}$. Ce point se démontre en vérifiant la formule pour le laplacien L sur $\mathfrak{p}$ par un calcul direct, puis en utilisant la formule suivante pour P homogène de degré n
$$\frac{1}{2^n n!}\mathrm{ad}^n(L)(P^\sharp) = \partial(P)$$
où $P^\sharp$ est la fonction polynomiale sur $\mathfrak{p}$ correspondant à P (via la forme de Killing). On en déduit que l'on a
$$\mathrm{Rad}\partial(P) = \frac{1}{2^n n!}\mathrm{ad}^n(\ell(T))(p^\sharp)$$
sur les fonctions $W-$ invariantes sur $\mathfrak{a}$ (on a noté $\ell = \mathrm{Res}(L)$). Puis pour les mêmes raisons on a
$$\frac{1}{2^n n!}\mathrm{ad}^n(\ell(T))(p^\sharp) = p(T).$$

1.2. Surjectivité de la restriction de Chevalley.
On montre dans cette section, en utilisant les opérateurs de Dunkl la surjectivité dans la théorème de Chevalley :

Theorem 1.1. *L'application de restriction de $S[\mathfrak{p}]^K$ sur $S[\mathfrak{a}]^W$ est un isomorphisme.*

La partie difficile du théorème de Chevalley est dans la surjectivité. En effet il est facile de voir que la trace des K-orbites génériques sur $\mathfrak{a}$ forment des W-orbites. Il en résulte d'une part l'injectivité de l'application de restriction et d'autre part l'isomorphisme par l'homomorphisme de restriction au niveau des corps de fractions : $S(\mathfrak{p})^K \approx S(\mathfrak{a})^W$ (cf. paragraphe 2. pour des considérations similaires plus générales).

Voici un argument élémentaire utilisant les opérateurs de Dunkl.

Notons R l'image de l'algèbre $S[\mathfrak{p}]^K$ par l'application de restriction de Chevalley. C'est une sous-algèbre de $S[\mathfrak{a}]^W$.

Il existe un produit scalaire (positif, non dégénéré) sur $S[\mathfrak{a}]$ donné par la formule
$$\langle p, q\rangle = p(T)(q)(0).$$
Cette formule définit encore un produit scalaire pour toutes les multiplicités positives (cf. [5]). Les opérateurs de Dunkl sont équivariants par rapport à l'action de W et la restriction de ce produit à $S[\mathfrak{a}]^W$ est encore non dégénérée et positive.

Lemma 1.2. *La restriction réalise une isométrie entre l'espace $S[\mathfrak{p}]^K$ muni du produit de Fischer et l'espace R muni du produit scalaire de Dunkl.*

Preuve : Pour P, Q dans $S[\mathfrak{p}]^K$ il suffit de remarquer que l'on a

$$\langle p, q\rangle = P(\partial)(Q)(0),$$

avec p, q les restrictions de P, Q. Cela résulte de la définition de la partie radiale de l'opérateur $P(\partial)$ et de la propriété 3 du paragraphe précédent. Comme le produit de Fischer est non dégénéré et positif sur $S[\mathfrak{p}]^K$ on en déduit le résultat. ■

Notons $R^\perp$ l'orthogonal de R dans $S[\mathfrak{a}]^W$ pour le produit scalaire de Dunkl. On a donc

$$R \oplus R^\perp = S[\mathfrak{a}]^W.$$

Il résulte de la définition de ce produit que l'adjoint de T_ξ $(\xi \in \mathfrak{a})$ est l'opérateur de multiplication par ξ. Par ailleurs R est stable pour l'action de $p(T)$ pour $p \in R$, car $S[\mathfrak{p}]^K$ est stable par l'action des opérateurs $\partial(P)$, on en déduit que $R^\perp$ est stable pour la multiplication par $p \in R$: c'est le point clé de notre argument.

Tout élément de $S[\mathfrak{a}]^W$ peut être remonté en une fraction K invariante sur $\mathfrak{p}$. C'est le côté facile de l'isomorphisme de Chevalley. On sait même que c'est une fraction bien définie près des éléments semi-simples réguliers. Ces éléments sont définis par l'inégalité $\pi \neq 0$ avec π le polynôme $K-$invariant coefficient du monôme de plus bas degré en T obtenu dans le développement de

$$\det_{\mathfrak{p}}(\mathrm{ad}^2(X) - T).$$

Terminons notre preuve du théorème de Chevalley :

Soit $p \in R^\perp$ et notons F la fraction $K-$invariante correspondante. Alors pour tout $r \in S[\mathfrak{p}]^K$ non nul, rF est une fraction qui n'est pas un polynôme, car $R^\perp$ est stable par multiplication par R. Ceci est absurde, car la fraction F est bien définie sur les éléments très réguliers donc il existe une puissance π^N telle que $\pi^N F$ soit un polynôme. On en déduit que $R^\perp$ est nul et donc que l'homomorphisme de restriction est surjectif. ■

2. Algèbres de Takiff

2.1. Rappels sur les algèbres de Takiff.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réductive sur $\mathbf{C}$ de dimension finie. On suppose que $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie d'un groupe affine réductif connexe G. Posons $\mathfrak{g}_m$ pour $m \in \mathbf{N}$ l'algèbre de Lie de Takiff généralisée [6] définie par

$$\mathfrak{g}_m = \mathfrak{g} \otimes \left(\mathbf{C}[T]/T^{m+1}\right).$$

C'est une algèbre de Lie algébrique dont un facteur réductif est isomorphe à $\mathfrak{g}$ et le facteur unipotent est $(\mathfrak{g} \otimes T) \oplus \cdots \oplus (\mathfrak{g} \otimes T^m)$. Concrètement on a

$$[X \otimes T^i, Y \otimes T^j] = [X, Y] \otimes T^{i+j}$$

si $i + j \leq m$ et 0 sinon. Ces algèbres sont étudiées dans [9] et [6]. On notera G_m un groupe affine connexe d'algèbre de Lie G_m. Ce groupe a un facteur réductif isomorphe à G.

L'algèbre des invariants $S[\mathfrak{g}_m]^{\mathfrak{g}_m}$ est une algèbre de polynômes décrite dans [9] et engendrée par les dérivées d'ordre inférieur à m des invariants élémentaires de $S[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{g}}$.

2.2. L'homomorphisme de restriction pour les algèbres de Lie algébriques.
Pour toute algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ algébrique, c'est à dire l'algèbre de Lie d'un groupe algébrique affine connexe G (non nécessairement réductif) M. Duflo a défini un homomorphisme de restriction généralisant celui de Chevalley. Pour $f \in \mathfrak{g}^*$ notons $\mathfrak{g}(f)$ le noyau de la forme bilinéaire alternée associée à f, c'est aussi l'annulateur de f pour l'action coadjointe. Lorsque f est régulier $\mathfrak{g}(f)$ est abélien et on note $\mathfrak{s}_f$ son tore maximal. On dira que f est générique si $\mathfrak{s}_f$ est de dimension maximal (parmi les f réguliers). Tous ces tores génériques sont conjugués, ce sont les sous-algèbres de Cartan-Duflo. Notons $\mathfrak{s}$ un tel tore et $\mathfrak{g}_o$ son centralisateur dans $\mathfrak{g}$. Notons M' le normalisateur de $\mathfrak{s}$ dans G. Alors l'homomorphisme de restriction généralisant celui de Chevalley dans le cas réductif est l'application naturelle de $S[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{g}}$ dans $S[\mathfrak{g}_o]^{\mathfrak{g}_o}$ déduite de la décomposition

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_o \oplus [\mathfrak{s}, \mathfrak{g}].$$

C'est une application injective à valeurs dans $S[\mathfrak{g}_o]^{M'}$. Notons $S(\mathfrak{g})$ le corps des fractions de $S[\mathfrak{g}]$ alors on a l'égalité suivante $S(\mathfrak{g})^G \approx S(\mathfrak{g}_o)^{M'}$. Cette égalité résulte du fait que pour $f \in \mathfrak{g}_o^*$ générique, on a $G \cdot f \cap \mathfrak{g}_o^* = M' \cdot f$. En général l'homomorphisme de restriction n'est pas surjectif.

2.3. Description de l'image par la restriction dans le cas Takiff.
Dans cet article on va s'intéresser, lorsque $\mathfrak{g}$ est réductive, à cet homomorphisme de restriction de restriction dans le cas des algèbres $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g} \otimes T$, dite algèbre de Takiff.

Il existe une forme bilinéaire invariante non dégénérée (mais non positive) sur $\mathfrak{g}_1$ donnée par

$$\langle X \otimes T^{\epsilon}, Y \otimes T^{1-\epsilon} \rangle = K(X, Y)$$

avec K la forme de Killing sur $\mathfrak{g}$ (si $\mathfrak{g}$ est réductive on prolongera la forme de Killing en une forme non dégénérée sur $\mathfrak{g}$). On identifiera alors $\mathfrak{g}_1$ avec son dual. Pour $f \in \mathfrak{g}_1^*$ on notera x_f l'élément correspondant dans $\mathfrak{g}_1$; la sous-algèbre $\mathfrak{g}(f)$ est égale alors au centralisateur de x_f.

Par ailleurs $x_f = x_o + x_1 \otimes T$ est régulier si et seulement si x_o est régulier dans $\mathfrak{g}$ [9]. Pour f générique on aura x_o générique dans $\mathfrak{g}$ c'est à dire semi-simple régulier.

On en déduit que les sous-algèbres de Cartan-Duflo sont conjuguées à $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h} \otimes T$ où $\mathfrak{h}$ désigne une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. Par conséquent le normalisateur dans G_1 s'identifie au normalisateur dans G c'est à dire le groupe de Weyl W. L'homomorphisme de restriction à la Chevalley de

$$S[\mathfrak{g}_1]^{\mathfrak{g}_1} \to S[\mathfrak{h}_1]^W$$

est donc un isomorphisme au niveau des fractions rationnelles. L'algèbre $S[\mathfrak{h}_1]^W$ n'est pas une algèbre de polynômes, contrairement à $S[\mathfrak{h}]^W$. L'homomorphisme de restriction dans cette situation n'est pas en général surjectif[1].

[1]Notons toutefois qu'un résultat de Joseph, assure que l'homomorphisme de restriction est surjectif de $S[\mathfrak{g}_1]^{\mathfrak{g}}$ (action diagonale) sur $S[\mathfrak{h}_1]^W$. Cette restriction n'est cependant pas injective.

Les racines de la décomposition de $\mathfrak{g}_1$ sous l'action de $\mathfrak{h}_1$ sont les extensions par 0 des racines $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ à $\mathfrak{h}_1$. On les note encore $\widehat{\alpha}$. On a alors pour tout $H_1 + H_2 \otimes T \in \mathfrak{h}_1$,

$$\langle H_\alpha \otimes T,\ H_1 + H_2 \otimes T\rangle = \widehat{\alpha}(H_1 + H_2 \otimes T) = \alpha(H_1),$$

avec H_α la coracine de α dans $\mathfrak{h}$. La coracine de $\widehat{\alpha}$ est donc $H_\alpha \otimes T$ et on a

$$\widehat{\alpha}(H_\alpha \otimes T) = 0,$$

c'est à dire que dans notre situation les racines sont de carré nul. Dans [7], pour le traitement de l'isomorphisme de Chevalley dans le cas des algèbres de Kac-Moody ou dans le cas des super-algèbres, l'existence de racines de carré nul ajoute, dans la description de l'image des invariants par l'homomorphisme de restriction, une condition sur les dérivées. Plus précisément on a ici le résultat suivant.

Pour $X \in \mathfrak{g}_1$ notons par $\delta(X)$ la dérivation dans $S[\mathfrak{g}_1]$ donnée sur $\mathfrak{g}_1$ par

$$\delta(X)(Y) = \langle X, Y\rangle.$$

Remarquons alors que $\delta(H_\alpha \otimes T)$ correspond à l'opérateur $\widehat{\alpha}$ agissant par dérivation. Pour $\alpha \in \Delta$ notons encore par r_α l'action diagonale de la réflexion de W associée à α.

Theorem 2.1. *Soit $p \in S[\mathfrak{h}_1]$. Alors p est dans l'image de l'homomorphisme de restriction de Chevalley si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

1- p est invariant par la r_α pour tout $\alpha \in \Delta$,

2- $(H_\alpha \otimes T)^n$ divise $\delta^n(H_\alpha \otimes T)p$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Preuve : Le résultat est vrai pour $\mathfrak{g} = \mathrm{sl}(2)$ car on a alors

$$\mathrm{Res}S[\mathfrak{g}_1]^{\mathfrak{g}_1} = \mathbf{C}[(H_\alpha \otimes T)^2, H_\alpha(H_\alpha \otimes T)].$$

On montre d'abord que les conditions sont nécessaires :

La première condition est claire d'après le paragraphe précédent. La deuxième se montre par réduction classique au cas $\mathrm{sl}(2)$. Soit $h_o \in \mathfrak{h}$ tel que l'on ait $\alpha(h_o) = 0$ et $\beta(h_o) \neq 0$ pour β racine non proportionnelle à α. Le centralisateur de h_o dans $\mathfrak{g}_1$ est la somme directe (comme idéaux) d'une partie abélienne et d'une algèbre de Takiff associée à un $\mathrm{sl}(2)$-triplet. Comme l'homomorphisme de restriction se factorise par ce centralisateur, on en déduit la condition 2 du théorème.

Montrons que cette condition est suffisante. On raisonne par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$.

Soit p vérifiant les deux conditions. Alors p s'étend en une fraction F qui est G_1-invariante et définie sur les éléments génériques ; c'est toujours la partie facile du théorème de restriction résultant du fait que les G_1-orbites génériques ont pour traces des W-orbites (action diagonale). Sans perte de généralité on peut supposer que $\mathfrak{g}$ est en fait semi-simple. Montrons que F est partout définie, ce qui montrera que F est un polynôme. Soit $f \in \mathfrak{g}_1^*$ et notons x_f l'élément correspondant dans $\mathfrak{g}_1$. Soit $x_f = x_s + x_u$ la décomposition de Jordan de x_f.

Supposons que l'on ait $x_s \neq 0$. Comme tous les éléments semi-simple de $\mathfrak{g}_1$ sont conjugué par G_1 à un élément de $\mathfrak{h}$, on peut supposer sans perte de généralité que l'on a $x_s \in \mathfrak{h}$. Notons $\mathfrak{m}$ le centralisateur de x_s dans $\mathfrak{g}$, il vient que le centralisateur dans $\mathfrak{g}_1$ vaut $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{m} \otimes T$. L'algèbre $\mathfrak{m}$ est réductive de dimension strictement inférieure à celle de $\mathfrak{g}$ et on a $x_f \in \mathfrak{m}_1$. Notons $F_{\mathfrak{m}_1}$ la restriction de F à $\mathfrak{m}_1$, qui est bien définie car on a $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{m}_1$. L'hypothèse de récurrence assure que $F_{\mathfrak{m}_1}$ est un polynôme, car les conditions énoncées portent sur les objets liés à $\mathfrak{m}$. Or l'application naturelle de

$$G_1 \times (\mathfrak{m}_1)^* \to \mathfrak{g}_1^*$$

est une submersion en f donc F est bien définie en f. Reste à étudier le cas des éléments nilpotents. Cet ensemble vaut $N_{\mathfrak{g}} + \mathfrak{g} \otimes T$ où $N_{\mathfrak{g}}$ désigne les éléments nilpotents de $\mathfrak{g}$. Cet ensemble ne constitue pas une sous-variété de codimension 1 sauf dans le cas sl(2), que l'on a déjà étudié. D'après le principe de Hartogs F est donc un polynôme. ■

Corollary 2.2. *On déduit de la proposition un résultat analogue pour le centre de l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}_1$, comme dans le théorème d'Harish-Chandra.*

Remark 2.3. Pour l'algèbre de Takiff généralisée $\mathrm{sl}(2)_2$ il n'est pas difficile de voir l'image par l'homomorphisme de restriction est engendrée par

$$(H \otimes T^2)^2, \quad (H \otimes T^2)(H \otimes T), \quad (H \otimes T)^2 + 2H(H \otimes T^2).$$

Les conditions énoncées dans le théorème 2.1 ne sont donc pas suffisantes dans ce cas pour décrire l'image.

2.4. Extension des résultats aux cas des paires symétriques de Takiff. Soit $(\mathfrak{g}, \theta)$ une paire symétrique réductive et définie sur $\mathbf{C}$. L'involution θ est obtenue par extension à $\mathbf{C}$ d'une involution de Cartan sur une forme réelle de $\mathfrak{g}$. On notera $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ la décomposition relativement à θ. On appelle θ-rang la dimension d'un sous-espace de Cartan dans $\mathfrak{p}$.

On étend l'involution θ à $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g} \otimes T$ de manière évidente ; on note θ_1 une telle extension et écrit $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{k}_1 \oplus \mathfrak{p}_1$ pour la décomposition associée. Alors la paire $(\mathfrak{g}_1, \sigma_1)$ sera appelée paire symétrique de Takiff. Plus généralement on pourra étendre θ à

$$\mathfrak{g}_n = \mathfrak{g} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g} \otimes T^n = \mathfrak{k}_n \oplus \mathfrak{p}_n,$$

on parlera alors de paires symétriques de Takiff généralisées.

L'involution θ se remonte à G (groupe réductif affine connexe (cf. [1]). On note K_θ le sous-groupe des points fixes et K sa composante irréductible. Les groupes K et K_θ diffèrent d'un groupe fini d'éléments d'ordre 2 ([8] §I.1 prop. 1).

Les groupes K et K_θ agissent sur $S[\mathfrak{p}]$, l'algèbre symétrique de $\mathfrak{p}$. D'après [8] §I.4 prop. 10 on a

$$S[\mathfrak{p}]^{\mathfrak{k}} = S[\mathfrak{p}]^K = S[\mathfrak{p}]^{K_\theta}.$$

Grâce aux résultats de Kostant-Rallis sur les espaces symétriques [8], on généralise sans peine les résultats de Rais-Tauvel sur la description des invariants $S[\mathfrak{p}_1]^{k_1}$ (resp. $S[\mathfrak{p}_n]^{\mathfrak{k}_n}$). Voici une argumentation succincte.

La description des invariants par le groupe K (K_θ) et l'existence d'une transversale de Kostant pour les K_θ-orbites ([8] §II.3), assure l'extension des arguments et les résultats de [9], notamment le lemme 3.5 et le théorème 4.5. En particulier l'algèbre des invariants $S[\mathfrak{p}_n]^{k_n}$ forme une algèbre de polynômes engendrée par les dérivées des générateurs de l'algèbre $S[\mathfrak{p}]^k$.

Remarquons que les paires de Takiff de θ-rang 1, ont déjà été rencontrées dans [10] §2.4.2.

Dans le cas des paires symétrique de Takiff sur $\mathbf{C}$, les arguments développés dans cet article assurent sans peine l'extension du théorème 2.1 au cas des espaces symétriques de Takiff. Principalement on remplace les sous-algèbres de Cartan par le sous-espace de Cartan et l'algèbre de Lie sl(2) est remplacé par les paires symétriques de θ-rang 1.

En effet la réduction procède du même principe, on raisonne par récurrence sur le rang de la paire symétrique de Takiff. Comme dans la preuve du théorème 2.1 on considère le centralisateur d'un élément H_o d'un sous-espace de Cartan vérifiant $\alpha(H_o) = 0$ (pour α une racine réduite) et $\beta(H_o) \neq 0$ pour β toute racine non proportionnelle à α. Le centralisateur de H_o nous ramène à une paire symétrique de Takiff de rang 1. L'image par l'homomorphisme de restriction a encore pour image (avec les notations du théorème 2.1)

$$(H_\alpha \otimes T)^2, \quad H_\alpha(H_\alpha \otimes T).$$

La récurrence peut donc s'amorcer et le reste des arguments est identique, y compris l'argument sur la co-dimension des éléments nilpotents car pour une paire symétrique réductive sur $\mathbf{C}$ les éléments nilpotents forment encore une variété de codimension égale au rang ([8] §I.4 th. 3). ∎

References

[1] Chevalley, C., "Théorie des groupes de Lie, 2," Hermann, Paris, 1951.

[2] Dunkl, C., *Operators commuting with Coxeter groups actions on polynomials*, In: Invariant Theory and Tableaux, D. Stanton, Ed., Springer-Verlag, Berlin Heildeberg, New-York, 1990, 107–117.

[3] —, *Integral kernels with reflection group invariance*, Can. J. Math. **43** (1991), 1213–1227.

[4] Heckman, G., *A remark on Dunkl differential-difference operators*, in: Harmonic analysis on reductive groups (Brunswick, ME, 1989), Progr. Math., **101**, Birkhäuser Boston, 1991, 181–191.

[5] de Jeu, M., *The Dunkl transform*, Invent. math. **113** (1993), 147–162.

[6] Geoffriau, F., *Homomorphisme de Harish-Chandra pour les algèbres de Takiff generalisées*, J. Algebra **171** (1995), 444–456.

[7] Kac, V.G., *Infinite root systems, representations of graphs and invariant theory II*, J. Algebra **78** (1982), 141–162.

[8] Kostant, B., and S. Rallis, *Orbits and representations associated with symmetric spaces*, Amer. J. Math. **93** (1971), 753–809.

[9] Raïs, M., and P. Tauvel, P., *Indice et polynômes invariants pour certaines algèbres de Lie*, J. reine angew. Mathematik **425** (1992), 123–140.

[10] Torossian, C., *L'homomorphisme d'Harish Chandra pour les paires symétriques orthogonales et parties radiales des opérateurs différentiels invariants sur les espaces symétriques*, Bull. Soc. Math. France **126** (1998), 295–354.

Charles Torossian
Ecole Normale Supérieure
45 rue d'Ulm
75230 Paris cedex 05
Charles.Torossian@ens.fr

Received February 2, 2006