Journal of Lie Theory
Volume **18** (2008) 161–180

L'indice de Maslov en dimension infinie

Stephane Merigon

Communicated by B. Ørsted

Abstract. Let E be a JB^*-triple whose set of invertible tripotents Σ is not empty. We construct a homotopy invariant index for paths in Σ that satisfie a Fredholm type condition with respect to a fixed invertible tripotent. This index generalises the Maslov index for the Fredholm-Lagrangian of an infinite dimensional symplectic Hilbert space defined in [3]. When E is finite dimensional we make the connection with the generalised triple index of [6, 8] and the generalised Souriau index of [9].
Mathematics Subject Index 2000: 53D12, 17C65, 32M15.
Keywords and phrases: Maslov index, bounded symmetric domains, Banach-Jordan algebras.

1. Introduction

Dans son traité *théorie des perturbations et méthodes asymptotiques*, V.P. Maslov introduit un indice pour les chemins dans la Lagrangienne d'un espace symplectique réel de dimension finie qui intervient dans le prolongement de solutions asymptotiques d'équations aux dérivées partielles. Dans [1] (voir aussi [2]), Arnold clarifie la définition de cet indice. Soit (H,ω) un espace symplectique réel de dimension $2n$ et notons $\Lambda(n)$ sa Lagrangienne. Pour tout $\lambda\in\Lambda(n)$ et tout $1\leq k\leq n$ posons

$$\Lambda_\lambda^k(n)=\{\mu\in\Lambda(n)\mid \dim\mu\cap\lambda=k\}.$$

Alors

$$\overline{\Lambda_\lambda^1(n)}=\bigsqcup_{1\leq k\leq n}\Lambda_\lambda^k(n)$$

est un cycle de lieu singulier $\bigsqcup_{2\leq k\leq n}\Lambda_\lambda^k(n)$. Il existe sur H un produit scalaire $(.,.)$ et une structure complexe J isométrique tels que

$$\forall\eta,\xi\in H,\quad \omega(\xi,\eta)=(J\xi,\eta).$$

On peut alors orienter $\overline{\Lambda_\lambda^1(n)}$ transversalement grâce au champ

$$v(\mu)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}_{|\theta=0}e^{J\theta}\mu,$$

ISSN 0949–5932 / \$2.50

le coté positif étant celui vers lequel $v(\mu)$ est dirigé. L'indice (par rapport à λ) d'un chemin γ dont les extrémités ne sont pas dans le cycle est par définition l'indice d'intersection de γ avec ce cycle : si l'ensemble des points d'intersection de γ avec le cycle est fini et contenu dans $\Lambda^1_\lambda(n)$ et si en chacun de ces points γ est continûment différentiable alors l'indice de Maslov est le nombre de points où γ traverse le cycle dans le sens positif moins le nombre de points où γ traverse le cycle dans le sens négatif. Lorsque l'on se restreint aux chemins fermés on obtient un élément du groupe de cohomologie entière $H^1(\Lambda(n),\mathbb{Z})$ qui ne dépend pas de λ.

Remarquons que l'orthogonal (pour le produit scalaire) d'un lagrangien λ est $\lambda^\perp = J\lambda$. Fixons une base orthogonale de λ et identifions H à $\mathbb{C}^n$ muni de la forme hermitienne $\langle .,. \rangle = (.,.) - i\omega(.,.)$ par :

$$\begin{aligned} H \simeq \lambda \oplus \lambda^\perp &\simeq \mathbb{C}^n \\ \eta \oplus J\xi &\mapsto \eta + i\xi. \end{aligned}$$

Alors le groupe $U(n)$ des matrices complexes unitaires de taille n agit transitivement sur $\Lambda(n)$ et le stabilisateur de λ s'identifie au sous-groupe des matrices réelles $O(n)$:

$$\Lambda(n) \simeq U(n)/O(n).$$

On peut donc définir une application $\mathrm{Det}^2 : \Lambda(n) \to S^1$ et Arnold montre qu'elle induit un isomorphisme des groupes fondamentaux :

$$\pi_1(\Lambda(n)) \simeq \pi_1(S^1).$$

Ainsi on a

$$H_1(\Lambda(n),\mathbb{Z}) \simeq \pi_1(\Lambda(n))$$

et il revient donc au même de se donner un générateur de $H^1(\Lambda(n),\mathbb{Z})$ ou un isomorphisme $\pi_1(\Lambda(n)) \simeq \mathbb{Z}$. Arnold montre que l'indice de Maslov coïncide avec l'image réciproque par Det^2 du générateur standard de $\pi_1(S^1)$ (le nombre de tours sur S^1 orienté dans le sens trigonométrique).

Motivé par une justification rigoureuse de la méthode de Maslov, Leray donne une variante de la définition d'Arnold-Maslov (cf. [18]). L'indice apparaît comme une fonction à deux variables sur le revêtement universel de la Lagrangienne et réalise une primitive d'un cocycle défini sur les triplets de lagrangiens appelé indice d'inertie. Enfin Souriau, grâce à une construction explicite du revêtement universel, donne une formule explicite pour la fonction de Maslov (cf. [22]).

Dans [3] Booss-Bavnbek et Furutani généralisent l'indice de Maslov pour la Lagrangienne d'un espace de Hilbert symplectique de dimension infinie H. Soit λ un lagrangien de H. L'indice est défini pour les chemins dans la Fredholm-Lagrangienne $\mathcal{F}\Lambda_\lambda$, c'est-à-dire l'ensemble des lagrangiens μ tels que (λ,μ) est une paire de Fredholm:

$$\dim \lambda \cap \mu < \infty \quad \text{et} \quad \dim H/(\lambda+\mu) < \infty,$$

et il réalise un isomorphisme entre $\pi_1(\mathcal{F}\Lambda_\lambda)$ et $\mathbb{Z}$.

Dans une autre direction, Jean-Louis Clerc et Bent Ørsted ont montré (cf. [6, 7, 8]) que l'indice triple se généralise naturellement à la frontière de Shilov S d'un domaine borné symétrique de type tube $\mathcal{D}$, et qu'il permet de caractériser les orbites de triplets transverses de S sous l'action du groupe des automorphismes holomorphes de $\mathcal{D}$. Puis Clerc et Koufany (cf. [9]) ont construit de deux manières différentes une primitive de l'indice triple sur le revêtement universel de la frontière de Shilov, l'une généralisant la méthode de Souriau et l'autre celle d'Arnold-Maslov. A la fin des années 70, Kaup et Upmeier ont développé la théorie des domaines borné symétriques dans les espaces de Banach, le résultat principal étant que la catégorie des domaines bornés symétriques est équivalente à celle des JB^*-triples. Dans cet article nous construisons l'indice de Maslov pour l'ensemble des tripotents inversibles d'un JB^*-triple, en adaptant la construction de Booss-Bavnbek et Furutani.

Le paragraphe 2 présente la structure de JB^*-triple et son lien avec les domaines bornés symétriques. Dans le paragraphe 3, nous détaillons l'identification entre la Lagrangienne d'un espace de Hilbert symplectique réel $H_0 \oplus H_0$ et l'ensemble des tripotents inversibles du JB^*-triple $\mathrm{Sym}(H_0 \oplus iH_0)$ et nous montrons que la définition d'une paire de Fredholm s'exprime dans le langage de la théorie de Jordan. Cela nous permet d'introduire dans le paragraphe 4 la définition d'une paire de Fredholm pour deux unités d'un JB^*-triple. Nous construisons alors l'indice de transversalité d'une telle paire (x, e) et étudions comment évolue cet indice lorsque l'on perturbe x. Cette étude nous permet de construire dans le paragraphe 5 l'indice de Maslov d'un chemin $t \mapsto x(t)$ $(0 \leq t \leq 1)$ tel que $(x(t), e)$ soit une paire de Fredholm pour tout t. Enfin dans le paragraphe 6 on se restreint à la dimension finie pour montrer le lien entre cet indice et ceux de Clerc, Koufany et Ørsted.

Notations. Si X est un espace topologique, On note $C(X)$ l'algèbre des fonctions complexes continues sur X. Si E et F sont deux espaces de Banach, on note $L(E, F)$ l'espace de Banach des opérateurs linéaires continus de E dans F muni de la norme d'opérateur et on pose $L(E) = L(E, E)$. Si $\mathcal{B}$ est une algèbre de Banach (associative) complexe et $x \in \mathcal{B}$, on note $\sigma(\mathcal{B}, x)$ le spectre de x dans $\mathcal{B}$. Lorsque $\mathcal{B} = L(E)$ on note simplement $\sigma(x)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté.

2. JB^*-triples et domaines bornés symétriques

Un JB^*-triple est la donnée d'un espace de Banach complexe $(E, |.|)$ et d'une application (on note $\overline{E}$ l'espace conjugué complexe de E)

$$Q \ : \ E \to L(\overline{E}, E)$$

quadratique et continue, telle que si l'on note

$$\{x, y, z\} = L(x, y)z = \frac{1}{2}(Q(x + y) - Q(x) - Q(y))z$$

le produit triple associé on ait l'*identité triple de Jordan* :

$$\{u, v, \{x, y, z\}\} = \{\{u, v, x\}, y, z\} - \{x, \{v, u, y\}, z\} + \{x, y, \{u, v, z\}\}$$

et les propriétés suivantes pour tout x de E :

1. $L(x, x)$ est un opérateur hermitien positif,

2. $|\{x,x,x\}| = |x|^3$.

Une algèbre de Jordan Banach est un espace de Banach $(E, |.|)$ muni d'un produit commutatif $x \circ y$ tel que

1. $|x \circ y| \leq |x|\,|y|$,
2. $x \circ (x^2 \circ y) = x^2 \circ (x \circ y), \quad \forall x, y \in E$.

Supposons E complexe et muni d'une involution antilinéaire $*$. Alors

$$\{x,y,z\} = x \circ (y^* \circ z) + z \circ (y^* \circ x) - (x \circ z) \circ y^*$$

vérifie l'identité triple de Jordan et E est appelée une JB^*-algèbre si l'on a

$$|\{x,x,x\}| = |x|^3, \quad \forall x \in E.$$

Si E possède un élément neutre, c'est alors un JB^*-triple. Une algèbre de Jordan Banach réelle A est appelée JB-algèbre si l'on a

1. $|x^2| = |x|^2$,
2. $|x^2| \leq |x^2 + y^2|, \quad \forall x, y \in A$.

La partie réelle d'une JB^*-algèbre est une JB-algèbre et réciproquement, étant donnée une JB-algèbre A, il existe sur $E = A \otimes \mathbb{C}$ une unique norme prolongeant celle de A et qui fait de E (muni du produit étendu par linéarité) une JB^*-algèbre (cf [26]).

Si E est une C^*-algèbre de produit xy alors E muni du produit de Jordan

$$x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx)$$

devient une JB^*-algèbre. Une JB^*-algèbre qui est isomorphe à une sous JB^*-algèbre (ie. un sous-espace fermé stable par le produit de Jordan) d'une C^*-algèbre est dite *spéciale*.

Un ouvert connexe et borné $\mathcal{D}$ d'un espace de Banach E est appelé domaine borné symétrique si à chacun de ses points on peut associer un automorphisme holomorphe involutif de $\mathcal{D}$ dont il est un point fixe isolé. Un tel domaine est homogène sous son groupe d'automorphismes et biholomorphiquement équivalent à un domaine borné cerclé (ie. contenant l'origine et invariant par la multiplication par un nombre complexe de module 1) et étoilé par rapport à l'origine [25]. Une telle réalisation est unique à isomorphisme linéaire près (car un biholomorphisme d'un domaine cerclé conservant l'origine est linéaire). L'ensemble des champs de vecteurs complets sur $\mathcal{D}$ est une algèbre de Lie Banach et le groupe des biholomorphismes de $\mathcal{D}$ peut être muni d'une structure de groupe de Lie Banach réelle dont l'algèbre de Lie s'y identifie (cf. [23, 24, 25]). Lorsque $\mathcal{D}$ est réalisé comme domaine cerclé cette algèbre de Lie que l'on notera $\mathfrak{g}$ se décompose suivant les espaces propres de l'action de la symétrie à l'origine :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$$

de sorte que $\mathfrak{k}$ est constitué de champs linéaires et que l'application

$$\mathfrak{p} \to E, \quad X \mapsto X(0)$$

est un isomorphisme de Banach. De plus il existe une application

$$Q \ : \ E \to L(\overline{E}, E)$$

quadratique et continue telle que pour tout $v \in E$ l'unique champ X_v de $\mathfrak{p}$ tel que $X_v(0) = v$ s'écrive

$$X_v(z) = v - Q(z)v.$$

Cette application fait de E un JB^*-triple dont la boule unité coïncide avec $\mathcal{D}$. Réciproquement la boule unité d'un JB^*-triple est un domaine borné symétrique (cf. [15, 16]).

Un élément x d'un JB^*-triple E est dit inversible si $Q(x)$ l'est. On note

$$x^{\#} = Q(x)^{-1}x.$$

On appelle tripotent tout élément tel que $Q(x)x = x$ et on note Σ l'ensemble des tripotents inversibles de E. Σ est une variété banachique. Si $e \in \Sigma$ alors le produit

$$x \circ y = \{x, e, y\}$$

et l'involution $Q(e)$ font de E une JB^*-algèbre de neutre e que l'on notera $E^{(e)}$ et le système triple associé à $E^{(e)}$ est bien celui de E. Pour cette raison on appelle parfois Σ l'ensemble des unités de E. On notera $A(e)$ la partie réelle de $E^{(e)}$ et

$$P(x) = Q(x)Q(e)$$

la représentation quadratique. Un élément x dans E est donc inversible si et seulement si $P(x)$ l'est et on définit son inverse dans $E^{(e)}$ par

$$x^{-1} = P(x)^{-1}x = Q(e)x^{\#}.$$

Cette définition est équivalente à la définition classique de l'inverse dans les algèbres de Jordan : x est inversible si et seulement si il existe un élément y tel que $x \circ y = e$ et $x^2 \circ y = x$, auquel cas y est unique et est appelé l'inverse de x (si E est une algèbre de Jordan spéciale, alors ces deux propriétés sont équivalentes à $xy = yx = 1$, cf. [14, p.51]).

On appelle tripotent régulier un tripotent x tel que $\ker L(x, x) = 0$ et on note S leur ensemble. Lorsque la dimension de E est finie (la théorie devient celle des systèmes triples de Jordan hermitiens positifs cf. [20]), si Σ est non vide alors $\Sigma = S$ (car S est homogène sous le groupe des automorphismes du système triple). En dimension infinie ce n'est plus le cas, mais S s'identifie toujours à la frontière extrémale (au sens de la convexité) de $\overline{\mathcal{D}}$, et Σ est une réunion de composantes connexes de S (cf. [4, 17]).

3. La Lagrangienne comme frontière de Shilov de $\mathrm{Sym}(H)$

Soit $(H, \langle .,. \rangle)$ un espace de Hilbert complexe (séparable) muni d'une involution antilinéaire isométrique $\xi \mapsto \tau(\xi)$. On note $B(H)$ l'espace des opérateurs bornés et $\mathrm{Sym}(H)$ l'ensemble des opérateurs bornés symétriques de H pour la forme bilinéaire $(.,.) = \langle ., \tau(.) \rangle$. $\mathrm{Sym}(H)$ est un JB^*-triple pour la norme d'opérateur et la structure triple donnée par

$$Q(x)z = x\overline{z}x.$$

On a, avec les notations du paragraphe précédent,

$$\Sigma = S = \{x \in \mathrm{Sym}(H) \mid \overline{x}x = \mathrm{id}\}.$$

On pose $\mathbb{H} = H \oplus H = \{\eta \oplus \xi \mid \xi, \eta \in H\}$. C'est un espace de Hilbert pour la forme hermitienne

$$\langle \eta \oplus \xi, \eta' \oplus \xi' \rangle = \langle \eta, \eta' \rangle + \langle \xi, \xi' \rangle \,.$$

On note $H_1 = H \oplus 0$ et $H_2 = 0 \oplus H$, π_1 et π_2 les projections sur H_1 (resp. H_2) parallèlement à H_2 (resp. H_1). Si $x \in B(H)$ alors $G(x) = \{x\xi \oplus \xi \mid \xi \in H\}$ est un sous-espace fermé de $\mathbb{H}$. Il est de plus transverse à H_1 (ie. $G(x) \oplus H_1 = \mathbb{H}$) car $\xi \oplus \eta = \xi' \oplus (x\xi' + \eta')$, $\xi, \eta, \xi', \eta' \in H$ se résout de manière unique en $\xi = \xi'$, $\eta' = \eta - x\xi$. Réciproquement, soit F un sous-espace fermé et transverse à H_1 et $\pi : F \to H_2$ la restriction de π_2 à F. L'application π est bijective parce que F est transverse et comme H_1 est un supplémentaire fermé π est continue et donc d'après le théorème de Banach elle est bicontinue. Alors $\pi_1 \circ \pi^{-1} \in B(H)$ et $G(\pi_1 \circ \pi^{-1}) = F$.

On muni $\mathbb{H}$ d'une structure symplectique grâce à

$$\omega(\eta \oplus \xi, \eta' \oplus \xi') = (\eta, \xi') - (\xi, \eta').$$

Si G est un sous-espace de $\mathbb{H}$ on note $G^\perp$ l'orthogonal pour le produit scalaire et G° l'orthogonal pour la forme symplectique. On appelle lagrangien un sous-espace λ tel que $\lambda^\circ = \lambda$. On appelle Lagrangienne l'ensemble des lagrangiens de $\mathbb{H}$ et on le note $\Lambda(\mathbb{H})$. Remarquons que H_1 et H_2 sont dans $\Lambda(\mathbb{H})$. Si l'on pose $J(\eta \oplus \xi) = (-\xi) \oplus \eta$ alors $\omega(.,.) = (J.,.)$ et pour tout $\lambda \in \Lambda(\mathbb{H})$, $\lambda^\perp = J\tau(\lambda)$.

Si $x \in B(H)$ on note ${}^t x$ le transposé de x par rapport à $(.,.)$. Alors $G({}^t x) = G(x)^\circ$. En effet l'inclusion $G({}^t x) \subset G(x)^\circ$ est clair et si il n'y avait pas égalité on aurait $G(x)^\circ \cap H_2 \neq \{0\}$ ce qui impliquerait $H_1 \cap H_2 \neq \{0\}$. L'application G induit donc une bijection entre $\mathrm{Sym}(H)$ et les lagrangiens transverses à H_1.

Pour caractériser l'image de Σ dans cette complétion introduisons la forme hermitienne

$$h(\eta \oplus \xi, \eta' \oplus \xi') = \langle \xi, \xi' \rangle - \langle \eta, \eta' \rangle.$$

Proposition 3.1. *Soit λ un lagrangien sur lequel h est positif. Alors λ est transverse à H_1.*

Proof. Soit λ tel que $h_{|\lambda\times\lambda} \geq 0$. Si $\eta \oplus 0 \in \lambda$ alors

$$h(\eta \oplus 0, \eta \oplus 0) = -\langle \eta, \eta \rangle \geq 0$$

donc $\eta = 0$ et $\lambda \cap H_1 = \{0\}$. Comme

$$(\lambda + H_1)^\perp = \lambda^\perp \cap H_1{}^\perp = J\tau(\lambda) \cap J\tau(H_1) = J\tau(\lambda \cap H_1) = \{0\},$$

il suffit de montrer que $\lambda + H_1$ est fermé. Soit $(\zeta_n)_{\mathbb{N}}$ une suite de $\lambda + H_1$ qui converge vers $\zeta \in \mathbb{H}$. Pour tout entier n, $\zeta_n = \xi_n + \eta_n + \eta'_n$ avec $\xi_n \in H_2$, $\eta_n, \eta'_n \in H_1$ et $\xi_n + \eta_n \in \lambda$. ξ_n est la projection orthogonale de ζ_n sur H_2 et converge donc vers la projection orthogonale ξ de η sur H_2. D'autre part, $h(\xi_n + \eta_n, \xi_n + \eta_n) = \langle \xi_n, \xi_n \rangle - \langle \eta_n, \eta_n \rangle \geq 0$ donc $(\eta_n)_{\mathbb{N}}$ est bornée et on peut extraire une suite, toujours notée $(\eta_n)_{\mathbb{N}}$, qui converge faiblement vers η. Mais H_1 est fermé pour la topologie forte et convexe donc fermé pour la topologie faible et donc $\eta \in H_1$. Comme $\xi_n + \eta_n$ converge faiblement vers $\xi + \eta$ et que η'_n converge faiblement vers $\eta' = \zeta - \xi - \eta$, on en déduit de même que $\xi + \eta \in \lambda$ et $\eta' \in H_1$. Par unicité de la limite on obtient la décomposition $\zeta = \xi + \eta + \eta'$ qui nous permet de conclure que $\zeta \in \lambda + H_1$. Finalement, λ est bien transverse à H_1. ■

Alors h s'annule sur $\lambda = G(x)$ si et seulement si $\forall \xi \in H$ $\langle x\xi, x\xi \rangle = \langle \xi, \xi \rangle$, ie. si et seulement si $\langle (1 - x^*x)\xi, \xi \rangle = 0$ ce qui équivaut par polarisation à $x^*x = 1$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Sym}(H) &\overset{G}{\hookrightarrow} \Lambda(\mathbb{H}) \\ \Sigma &\simeq \{\lambda \in \Lambda(\mathbb{H}) \mid h_{|\lambda\times\lambda} = 0\}. \end{aligned}$$

L'involution antilinéaire isométrique τ s'étend à $\mathbb{H}$ en posant

$$\tau(\eta \oplus \xi) = \tau(\eta) \oplus \tau(\xi).$$

Si H_0 est la forme réelle de H alors celle de $\mathbb{H}$ est $\mathbb{H}_0 = H_0 \oplus H_0$. La forme symplectique vérifie

$$\omega(\tau(\eta \oplus \xi), \tau(\eta' \oplus \xi')) = \overline{\omega(\eta \oplus \xi, \eta' \oplus \xi')}.$$

On peut donc la restreindre à $\mathbb{H}_0$ en une forme symplectique réelle. On note $\Lambda(\mathbb{H}_0)$ la Lagrangienne de $(\mathbb{H}_0, \omega)$. Si E_0 est un sous-espace de $\mathbb{H}_0$, $E_0 \otimes \mathbb{C} \simeq E_0 \oplus iE_0$ est un sous-espace de $\mathbb{H}$ et les sous-espaces de $\mathbb{H}$ qui s'écrivent de cette manière sont les sous-espaces stables par conjugaison. On a donc une bijection entre la Lagrangienne réelle et l'ensemble des lagrangiens complexes stables par conjugaison :

$$\Lambda(\mathbb{H}_0) \overset{\otimes\mathbb{C}}{\simeq} \Lambda(\mathbb{H})^\tau.$$

On définit la transformée de Cayley sur $\mathbb{H}$ par

$$C(\eta \oplus \xi) = \frac{1}{\sqrt{2}}((\eta + i\xi) \oplus (i\eta + \xi)).$$

On a

$$\omega(C., C.) = \omega(., .) \quad \text{et} \quad ih(., .) = \omega(C., \tau(C.)).$$

C conserve donc les lagrangiens et les lagrangiens sur lesquels h s'annule sont transformés en les lagrangiens stables par conjugaison. On a donc obtenu une bijection entre Σ et la Lagrangienne réelle:

$$\begin{array}{rlr} \mathrm{Sym}(H) \overset{G}{\hookrightarrow} & \Lambda(\mathbb{H}) & \overset{C}{\simeq} \Lambda(\mathbb{H}) \overset{\otimes\mathbb{C}}{\hookleftarrow} \Lambda(\mathbb{H}_0) \\ \Sigma \simeq & \{\lambda \in \Lambda(\mathbb{H}) \mid h_{|\lambda\times\lambda} = 0\} & \simeq \Lambda(\mathbb{H})^{\tau} \simeq \Lambda(\mathbb{H}_0). \end{array}$$

Réciproquement, soit $(\mathbb{H}_0, \omega, \langle\cdot,\cdot\rangle, J)$ un espace de Hilbert (réel) symplectique compatible, c'est-à-dire que la forme symplectique ω et le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sont liés par la relation $\omega(\cdot,\cdot) = \langle J\cdot,\cdot\rangle$ où J est à la fois un opérateur orthogonal et une structure complexe. Soit $\lambda_0 \in \Lambda(\mathbb{H}_0)$. Alors λ_0 est fermé et $\lambda_0^{\perp} = J\lambda_0$. Suivant la décomposition $\mathbb{H}_0 = \lambda_0 \oplus J\lambda_0 \simeq \lambda_0 \oplus \lambda_0$,

$$\omega(\xi \oplus \eta, \xi' \oplus \eta') = \langle \xi, \eta' \rangle - \langle \eta, \xi' \rangle$$

et on peut étendre ω et $\langle .,. \rangle$ à $\mathbb{H} = \mathbb{H}_0 \otimes \mathbb{C}$ et poser $H = \lambda_0 \oplus i\lambda_0$.

Dans [3] est introduite la notion de paire de Fredholm pour des lagrangiens (réels) : la paire de lagrangiens (λ, μ) est appelée paire de Fredholm si

$$\dim \lambda \cap \mu < \infty \quad \text{et} \quad \dim \mathbb{H}_0/(\lambda + \mu) < \infty.$$

Soient x et y deux opérateurs de H, et $G(x)$ et $G(y)$ leurs graphes dans $\mathbb{H}$. Alors

$$\ker(y - x) = \pi_2(G(x) \cap G(y)),$$

et

$$H/\ker(y - x) \simeq G(x)/G(x) \cap G(y)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} G(x) + G(y) &= \{x\xi \oplus \xi + y\xi' \oplus \xi' \mid \xi, \xi' \in H\} \\ &= \{(x\xi + y\xi') \oplus (\xi + \xi') \mid \xi, \xi' \in H\} \\ &= \{(x\zeta + (y - x)\xi') \oplus \zeta \mid \zeta, \xi' \in H\} \\ &= G(x) + (y - x)H \oplus 0. \end{aligned}$$

En considérant l'application

$$\begin{gathered} \mathbb{H} \to H_1 \to H_1/(y - x)H \oplus 0 \\ \xi \oplus \eta \mapsto (\eta - x\xi) \oplus 0 \mapsto (\eta - x\xi) \oplus 0 + (y - x)H \oplus 0 \end{gathered}$$

on obtient l'isomorphisme

$$\mathbb{H}/G(x) + G(y) \simeq H/(y - x)H.$$

Comme C et $\otimes\mathbb{C}$ respectent l'intersection et la somme, on en déduit que $\lambda = G \circ C \circ \otimes\mathbb{C}(x)$ et $\mu = G \circ C \circ \otimes\mathbb{C}(y)$, où $x, y \in \Sigma$, forment une paire de Fredholm si et seulement si $y - x$ est un opérateur de Fredholm sur H. Si $\lambda \oplus \mu = \mathbb{H}_0$ on dit que la paire (λ, μ) est transverse. C'est le cas si et seulement si $y - x$ est inversible. Dans le cas de $\mathrm{Sym}(H)$ l'inversiblité au sens des JB^*-triple coïncide avec celle des opérateurs. Lorsque x et y sont deux unités d'un JB^*-triple, l'inversiblité de $Q(y-x)$ est équivalente à celle de l'opérateur de Bergman $B(x,y) = \mathrm{id} - 2L(x,y) + Q(x)Q(y)$ en vertu de l'identité (cf. [19, 2.12])

$$B(x,y) = Q(y^\# - x)Q(y).$$

Lorsque x et y sont quelconques, c'est l'inversibilité de $B(x,y)$ qui définit la notion de transversalité (ou de quasi-inversibilité). Dans $\mathrm{Sym}(H)$,

$$\begin{aligned} B(x,y)z &= z - (x\overline{y}z + z\overline{y}x) + x\overline{y}z\overline{y}x \\ &= (1 - x\overline{y})z(1 - \overline{y}x), \end{aligned}$$

et lorsque x et y sont dans Σ on a

$$B(x,y)z = (1 - xy^{-1})z(1 - y^{-1}x).$$

Lemma 3.2. *Si k est un opérateur compact de H alors*

$$B(H) \to B(H), \qquad z \mapsto kz$$

est un opérateur compact de $B(H)$.

Proof. Soit k un opérateur compact de H. Il s'agit de monter que l'image de la boule unité B de $B(H)$ par $z \mapsto kz$ est relativement compacte. Soit $(kz_n)_{\mathbb{N}^*}$ une suite dans cette image. Soit $A = \{\xi_l,\ l \in \mathbb{N}^*\}$ une partie dénombrable et dense de H. La suite $(kz_n\xi_1)_{\mathbb{N}^*}$ est dans un compact donc on peut extraire une suite $(kz_{\phi_1(n)}\xi_1)_{\mathbb{N}^*}$ qui converge vers $\eta_1 \in H$. De même on peut extraire de la suite $(kz_{\phi_1(n)}\xi_2)_{\mathbb{N}^*}$ une suite $(kz_{\phi_1\circ\phi_2(n)}\xi_2)_{\mathbb{N}^*}$ qui converge vers η_2. En recommençant on trouve pour tout $l \in \mathbb{N}^*$ une fonction $\phi_l : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ strictement croissante telle que $(kz_{\phi_1\circ\cdots\circ\phi_l}(n)\xi_l)_{\mathbb{N}^*}$ converge vers $\eta_l \in H$. On pose $\psi(n) = \phi_1 \circ \cdots \circ \phi_n(n)$ et alors pour tout $l \in \mathbb{N}^*$, $(kz_{\psi(n)}\xi_l)_{\mathbb{N}^*}$ est une suite extraite de $(kz_{\phi_1\circ\cdots\circ\phi_l}(n)\xi_l)_{\mathbb{N}^*}$ et converge donc vers η_l. Posons $v\xi_l = \eta_l$ alors v est uniformément continue sur A et se prolonge donc en un opérateur v uniformément continu et en fait linéaire continu sur H. Quitte à renuméroter, supposons que $(kz_n)_{\mathbb{N}^*}$ converge vers v en tout point de A. Alors $(kz_n)_{\mathbb{N}^*}$ converge vers v en tout point $\zeta \in H$: en effet, si $|\zeta - \xi_l| < \varepsilon$ alors $|kz_n\zeta - v\zeta| \le |kz_n\zeta - kz_n\xi_l| + |kz_n\xi_l - v\xi_l| + |v\xi_l - v\zeta| \le (|k|+|v|)\varepsilon + |kz_n\xi_l - v\xi_l| \le (|k|+|v|+1)\varepsilon$ pour n suffisamment grand. Remarquons que cela entraîne que v est compact : si $\zeta \in B$ alors $kz_n\zeta \in kB$ et donc $v\zeta \in \overline{kB}$. Il reste à montrer que $(kz_n)_{\mathbb{N}^*}$ converge vers v en norme. Si ce n'est pas vrai,

$$\exists\ \varepsilon > 0\ \forall N > 0\ \exists n \ge N\ \sup_{|\zeta|\le 1} |kz_n\zeta - v\zeta| > \varepsilon.$$

On peut alors construire une suite $(\zeta_n)_{\mathbb{N}^*}$ dans la boule unité de H et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \left|kz_{\varphi(n)}\zeta_n - v\zeta_n\right| > \varepsilon.$$

Or la suite $kz_{\varphi(n)}\zeta_n$ évolue dans un compact, donc on peut la supposer convergente. On peut aussi supposer que $(\zeta_n)_{\mathbb{N}^*}$ converge faiblement vers $\zeta \in H$. Mais alors $(kz_{\varphi(n)}\zeta_n)_{\mathbb{N}^*}$ converge faiblement vers $v\zeta$. En effet, $\forall \varsigma \in H$, $\left|\left\langle kz_{\varphi(n)}\zeta_n - v\zeta_n, \varsigma\right\rangle\right| = \left|\left\langle \zeta_n, {}^{\mathrm{t}}(kz_{\varphi(n)})\varsigma - {}^{\mathrm{t}}v\varsigma\right\rangle\right| \le \left|{}^{\mathrm{t}}(kz_{\varphi(n)})\varsigma - {}^{\mathrm{t}}v\varsigma\right| \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Donc $kz_{\varphi(n)}\zeta_n$ converge fortement vers $v\zeta$ mais, comme v est compact, $v\zeta_n$ converge fortement vers $v\zeta$; d'où une contradiction et le résultat. ∎

Proposition 3.3. *Soient x et y deux unités de* $\mathrm{Sym}(H)$. *Alors $y - x$ est un opérateur de Fredholm si et seulement si $B(x, y)$ est un opérateur de Fredholm.*

Proof. Supposons que $y - x$ est un opérateur de Fredholm. Alors c'est aussi le cas de $u = 1 - xy^{-1}$ et ${}^{\mathrm{t}}u = 1 - y^{-1}x$ et avec ces notations $B(x, y)z = uz{}^{\mathrm{t}}u$. Un opérateur est de Fredholm si et seulement si il est inversible modulo les opérateurs compacts donc il existe $v \in B(H)$ et deux opérateurs compacts k et k' de $B(H)$ tels que

$$vu = \mathrm{id} + k, \quad uv = \mathrm{id} + k'.$$

Posons

$$C_v : \mathrm{Sym}(H) \to \mathrm{Sym}(H), \quad z \mapsto vz{}^{\mathrm{t}}v.$$

Alors $C_vB(x, y)z = z + kz{}^{\mathrm{t}}k + kz + z{}^{\mathrm{t}}k$ et $B(x, y)C_vz = z + k'z{}^{\mathrm{t}}k' + k'z + z{}^{\mathrm{t}}k'$. D'après le lemme 3.2, l'opérateur $z \mapsto kz$ de $B(H)$ dans $B(H)$ est compact. Comme l'ensemble des opérateurs compacts forme un idéal bilatère de $B(H)$, $z \mapsto kz + {}^{\mathrm{t}}z{}^{\mathrm{t}}k + kz{}^{\mathrm{t}}k$ est aussi un opérateur compact. De plus cet opérateur laisse stable $\mathrm{Sym}(H)$ et donc par restriction on obtient un opérateur compact de $\mathrm{Sym}(H)$ et il en est de même pour $z \mapsto k'z + {}^{\mathrm{t}}z{}^{\mathrm{t}}k' + k'z{}^{\mathrm{t}}k'$. Ainsi $B(x, y)$ est inversible modulo les opérateurs compacts et c'est donc un opérateur de Fredholm. Réciproquement, supposons que $B(x, y) : z \mapsto uz{}^{\mathrm{t}}u$ est un opérateur de Fredholm. Soit $\xi \in \ker u$ et posons

$$P_\xi : \eta \mapsto (\eta, \xi)\xi.$$

Alors $\forall \eta \in H$, $(P_\xi \circ {}^{\mathrm{t}}u)\eta = ({}^{\mathrm{t}}u\eta, \xi)\xi = (\eta, u\xi)\xi = 0$ donc $P_\xi \in \ker B(x, y)$. De plus si $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ est une famille libre de $\ker u$, alors $(P_{\xi_1}, \dots, P_{\xi_n})$ est une famille libre (il suffit de l'évaluer en un élément de $H \backslash \cup \ker(., \xi_i)$). Donc $\ker u$ est de dimension finie sinon $\ker B(x, y)$ serait de dimension infinie. Remarquons que ${}^{\mathrm{t}}uzu = (1 - y^{-1}x)z(1 - xy^{-1}) = y^{-1}(1 - xy^{-1})yzy(1 - y^{-1}x)y^{-1}$ et donc $z \mapsto {}^{\mathrm{t}}uzu$ est aussi de Fredholm et $\ker {}^{\mathrm{t}}u$ est de dimension finie. Alors puisque $(\operatorname{im} \tau(u))^\perp = \overline{\ker {}^{\mathrm{t}}u}$, il reste à montrer que $\operatorname{im} u$ est fermé. Pour cela considérons une suite (ξ_n) de H telle que $u\xi_n$ converge vers $\eta \in H$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = P_{\xi_n}$. Alors $uz_n{}^{\mathrm{t}}u = P_{u\xi_n}$ converge vers P_η dans $\mathrm{Sym}(H)$. En effet,

$$\begin{aligned} |P_{\xi_n} - P_\eta| &\leq |(., u\xi_n)u\xi_n - (., u\xi_n)\eta| + |(., u\xi_n)\eta - (., \eta)\eta| \\ &\leq (|u\xi_n| + |\eta|)\, |u\xi_n - \eta|\,. \end{aligned}$$

Cependant la suite $(uz_n{}^{\mathrm{t}}u)$ est dans l'image de $B(x, y)$ qui est fermée donc il existe $z \in \mathrm{Sym}(H)$ tel que $P_\eta = uz{}^{\mathrm{t}}u$ et alors, en choisissant η' tel que $(\eta', \eta) \neq 0$, $\eta = u(z{}^{\mathrm{t}}u\frac{\eta'}{(\eta', \eta)}) \in \operatorname{im} u$. ∎

4. Les paires de Fredholm et l'indice de transversalité

Dans cette partie on considère un JB^*-triple E tel que Σ ne soit pas vide (les notations sont celles de la partie 2).

Definition 4.1. Soient x et y deux unités de E. On dit que (x, y) est une paire de Fredholm si $B(x, y)$ (ou de manière équivalente $Q(y-x)$) est un opérateur de Fredholm.

On note $\mathcal{F}\Sigma_e$ l'ensemble des tripotents inversibles x tels que (x, e) soit une paire de Fredholm. Cet ensemble est ouvert dans Σ car l'ensemble des opérateurs de Fredholm est ouvert dans $L(E)$.

Si x et e sont deux unités, on veut faire l'analyse spectrale de x par rapport à e. On note $C(x, e)$ la sous JB^*-algèbre de $E^{(e)}$ engendrée par x et e.

Proposition 4.2. *$C(x, e)$ est associative et c'est donc une C^*-algèbre commutative.*

Proof. Soit A l'algèbre de Jordan engendrée par e, x et x^* dans $E^{(e)}$. D'après le théorème de Shirshov-Cohn [14, p.48] c'est une algèbre de Jordan spéciale. On note $x \circ y$ le produit de Jordan de x et y et on note par juxtaposition le produit associatif dont il est issu. Comme $x^* = x^{-1}$, on a $xx^* = x^*x = 1$. En particulier, x et x^* commutent et comme il en est de même pour tout polynôme en x et x^*, les deux produits coïncident dans A. Par continuité du produit de Jordan, $C(x, e) = \overline{A}$ est encore associative. ■

On appelle spectre de x par rapport à e, et on note $Sp(x, e)$, le spectre de x dans la C^*-algèbre $C(x, e)$. Il existe une topologie sur $Sp(x, e)$ qui en fait un espace de Hausdorff compact, et la représentation de Gel'fand

$$\mathcal{G}_{x,e} : C(x, e) \to C(Sp(x, e)), \quad y \mapsto \hat{y}$$

qui à x associe la fonction $\hat{x}(\mu) = \mu$ est un homéomorphisme. Comme x est unitaire dans $C(x, e)$, $Sp(x, e)$ est contenu dans le cercle unité $\mathbb{U}$. Le lemme suivant est l'analogue de [13, lemma 3.2.8] pour les JB^*-algèbres et la démonstration est la même.

Lemma 4.3. *$\lambda \in Sp(x, e)$ si et seulement si $P(\lambda e - x)$ n'est pas inversible.*

Lorsque E est de dimension finie, on connaît précisément le spectre de $B(x, e)$ en fonction de $Sp(x, e) = \sigma(L(x, e)_{|C(x,e)})$ grâce à la décomposition de Peirce. Une légère adaptation du théorème (3.3) (et de son corollaire (3.4)) de [16] donne une version qualitative de ce résultat en dimension infinie.

Proposition 4.4. *Soit $S = \sigma(L(x, e)_{|C(x,e)})$. Alors*

$$\sigma(L(x, e)) \subset \frac{1}{2}(S + S), \quad \sigma(B(x, e)) \subset (1 - S)(1 - S).$$

Proof. Puisque e est neutre dans l'algèbre de Jordan $E^{(e)}$, on peut remplacer dans la démonstration de [16, Theorem 3.3] le sous-espace $A = \overline{\langle L(x, e)^k x \rangle}$ par $C(x, e)$ et ne pas adjoindre d'unité. ■

De ce résultat on déduit que

$$\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda < 0\} \cap \sigma(B(x, e)) = \emptyset$$

et donc si $0 \in \sigma(B(x, e))$ alors $0 \in \partial\sigma(B(x, e))$ (on peut aussi remarquer que si $0 \leq t < 1$ alors $B(tx, e)$ est inversible). Donc si (x, e) est une paire de Fredholm non transverse, alors 0 est isolé dans le spectre de $B(x, e)$.

Proposition 4.5. *Si (x, e) est une paire de Fredholm non transverse alors* 1 *est un point isolé dans $Sp(x, e)$.*

Proof. D'après le lemme 4.3, $1 \in Sp(x, e)$. Si 1 n'est pas isolé dans $Sp(x, e)$ soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $Sp(x, e)$ qui tend vers 1. On veut montrer que $\lambda_n \in \sigma(L(x))$. Pour cela considérons

$$\mathcal{B} = \{T \in L(E) \mid TC(x, e) \subset C(x, e)\}$$

et

$$\rho : \mathcal{B} \to L(C(x, e))$$

le morphisme de restriction. Alors si $T \in \mathcal{B}$ on a

$$\sigma(\rho(T)) \subset \sigma(\mathcal{B}, T) \text{ et } \partial\sigma(\mathcal{B}, T) \subset \partial\sigma(T).$$

Donc $\lambda_n \in \sigma(\mathcal{B}, L(x))$ mais comme $|x| \leq 1$, $\lambda_n \in \partial\sigma(\mathcal{B}, L(x)) \subset \partial\sigma(L(x))$. Comme $L(x)^2_{|C(x,e)} = P(x)_{|C(x,e)}$ un raisonnement identique montre que $\lambda_n^2 \in \sigma(P(x))$ et comme $[L(x), P(x)] = 0$ on a $(1 - \lambda_n)^2 \in \sigma(B(x, e))$ et 0 n'est pas isolé dans $\sigma(B(x, e))$. ∎

Corollary 4.6. *Soit Σ_e la composante connexe de Σ contenant e. Alors*

$$\mathcal{F}\Sigma_e \subset \Sigma_e.$$

Proof. Soit $x \in \mathcal{F}\Sigma_e$. Alors $Sp(x, e)$ n'est pas $\mathbb{U}$ tout entier, et on peut donc définir $\log x \in C(x, e)$, log étant une détermination adéquate du logarithme. Alors $P(exp(\frac{1}{2}\log x))e = x$ donne le résultat. ∎

Si σ est un sous-ensemble à la fois fermé et ouvert de $Sp(x, e)$ alors sa fonction caractéristique χ_σ (qui vaut 1 sur σ et 0 ailleurs) est continue sur $Sp(x, e)$ (un tel sous-ensemble sera appelé sous-ensemble spectral). C'est en particulier le cas d'une valeur propre isolée. Supposons que $e^{i\theta}$ soit isolée dans $Sp(x, e)$ et posons

$$p(x, e, \theta) = \mathcal{G}^{-1}_{x,e}(\chi_{\{e^{i\theta}\}}).$$

C'est un idempotent (on dira aussi projecteur) auto-adjoint de $E^{(e)}$. Notons dans ce qui suit $p = p(x, e, \theta)$. L'opérateur $L(p)$ agissant sur $A(e)$ vérifie (cf. [11, Proposition III.1.3])

$$(L(p) - 1)(2L(p) - 1)L(p) = 0$$

et donc, si l'on note $A_\alpha(e)$ l'espace propre de $L(p)_{|A(e)}$ associé à la valeur propre α,

$$A(e) = A_0(e) \oplus A_{\frac{1}{2}}(e) \oplus A_1(e).$$

Puisque $P(p)^2 = P(p)$ et $P(p)L(p) = L(p)P(p) = P(p)$, le projecteur spectral associé à la valeur propre 1 est $P(p)$ et on notera $Ap(e) = A_1(e) = P(p)A(e)$. Remarquons que $P(p)Q(e) = Q(e)P(p) = Q(p)$ et donc $P(p)E^{(e)} = Ap(e) \oplus iAp(e)$.

Definition 4.7. On dit que $e^{i\theta}$ est une valeur propre isolée de multiplicité finie si $Ap(e)$ est de dimension finie.

Proposition 4.8. *Soient x et e deux unités telles que 1 soit une valeur propre isolée dans $Sp(x,e)$ et soit $p = p(x,e,0)$. Alors*

$$Ap(e) \subset \ker B(x,e).$$

En particulier si (x,e) est une paire de Fredholm (non transverse) alors 1 est une valeur propre isolée de multiplicité finie.

Proof. Notons $y = x - p$. Alors

$$p^{\perp} = e - p = \mathcal{G}_{x,e}^{-1}(\chi_{Sp(x,e)\setminus\{1\}})$$

et

$$\mathcal{G}_{x,e}(y) = \hat{x} - \chi_{\{1\}} = \hat{x} - \chi_{\{1\}}\hat{x} = (1 - \chi_{\{1\}})\hat{x} = \chi_{Sp(x,e)\setminus\{1\}}\hat{x},$$

donc $y \circ p^{\perp} = y$. Soit $a \in Ap(e)$: $p \circ a = a$ et $p^{\perp} \circ a = 0$. Comme

$$A_0(e) \circ A_1(e) = 0$$

on a $a \circ y = 0$ et $x \circ a = p \circ a + y \circ a = a$. Comme $x^2 = p + y^2$ et $p^{\perp} \circ y^2 = y^2$ il vient de même $x^2 \circ a = a$ et finalement $B(x,e)a = 0$. ∎

Si $Ap(e)$ est une JB-algèbre de dimension finie, c'est une algèbre de Jordan formellement réelle (cf [13, 2.9]). Un idempotent d'une telle algèbre est dit primitif s'il n'est pas somme de deux idempotents orthogonaux non nuls. Toute famille d'idempotents orthogonaux non nuls étant libre, p s'écrit comme somme finie d'idempotents primitifs dont le nombre de termes ne dépend pas de la décomposition : on l'appelle le rang de p et aussi le rang de l'algèbre $Ap(e)$ (et on le note $\operatorname{rang} p$).

Definition 4.9. Si $e^{i\theta} \in Sp(x,e)$ est une valeur propre isolée de multiplicité finie et $p(x,e,\theta)$ le projecteur associé on pose

$$\mu(x,e,\theta) = \operatorname{rang} p(x,e,\theta),$$

et par convention $\mu(x,e,\theta) = 0$ si $e^{i\theta} \notin Sp(x,e)$. Si $\theta = 0$, on note simplement $\mu(x,e) = \operatorname{rang} p(x,e)$ et on appelle ce nombre l'indice de transversalité de la paire (x,e).

Si 1 est isolé dans $Sp(x,e)$, soit $0 < \varepsilon < \pi$ tel que si

$$\mathcal{A}_{\varepsilon} = \{e^{i\theta} \mid 0 < |\theta| \leq \varepsilon\},$$

$Sp(x,e) \cap \mathcal{A}_{\varepsilon} = \emptyset$. Dans une algèbre de Jordan Banach, l'ensemble des éléments inversibles est ouvert, donc il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de x tel que

$$\forall y \in \mathcal{V} \quad y - e^{\pm i\varepsilon}e \text{ est inversible.}$$

Alors si y est une unité dans $\mathcal{V}$, $\sigma_{\varepsilon} = \mathcal{A}_{\varepsilon} \cap Sp(y,e)$ est un sous-ensemble spectral et on peut donc définir $q(y,e,\varepsilon) = \mathcal{G}_{y,e}^{-1}(\chi_{\sigma_{\varepsilon}})$. Alors [10, IX, lemma 13]

$$q(y,e,\varepsilon) = \int_{|\lambda-1|=\varepsilon} \frac{1}{2i\pi}(\lambda e - y)^{-1} d\lambda,$$

ce qui prouve, l'inversion étant continue, que si y est suffisamment proche de x, $q(y,e,\varepsilon)$ l'est suffisamment de $p(x,e)$. Or dans [5], il est prouvé que si p est un idempotent d'une JB-algèbre A, tout idempotent q dans un voisinage de p peut s'écrire

$$q = \exp p_v(p)$$

où $v \in A_0(p)$, $p_v = 4\,[L(v), L(p)]$ et $\exp p_v$ est un automorphisme de A. Quitte à restreindre $\mathcal{V}$, on a donc, en faisant $p = p(x,e)$ et $q = q(y,e,\varepsilon)$: pour tout y dans $\mathcal{V}$, $Aq(e)$ est isomorphe à $Ap(e)$. En particulier, si $Ap(e)$ est de dimension finie alors $Aq(e)$ aussi et les rangs sont égaux. Nous avons maintenant besoin du lemme suivant :

Lemma 4.10. *Soient x et e deux unités et σ un sous-ensemble spectral de $Sp(x,e)$. Si $p = \mathcal{G}^{-1}_{(x,e)}(\chi_\sigma)$ alors $P(p)x$ et p sont deux unités de $P(p)E$ et on a les propriétés suivantes :*

1. *$P(p)C(x,e) = C(P(p)x, p) \subset C(x,e)$,*
2. *$Sp(P(p)x, p) = \sigma$,*
3. *Si $f \in C(Sp(x,e))$ alors $f \in C(\sigma)$ et $P(p)f(x) = f_{|\sigma}(P(p)x)$.*

Proof. (1) $P(p)x^2 = pxxp = pxxp^2 = pxpxp = pxppxp = (P(p)x)^2$ puisque $p \in C(x,e)$.
(2) Si $\lambda \notin Sp(P(p)x,p)$ alors il existe $z \in C(P(p)x,p)$ tel que

$$(\lambda p - P(p)x)z = p.$$

Soit $g(\mu) = (1-\chi_\sigma(\mu))(\lambda-\mu)^{-1}$ pour $\mu \in Sp(P(p)x,p)$. Alors

$$g(x)(\lambda e - x) = e - p.$$

Grâce à (1), $(\lambda e - x)z = (\lambda e - x)P(p)z = (\lambda e - x)pzp = (\lambda p - P(p)x)z = p$ et

$$(g(x) - z)(\lambda e - x) = p + e - p = e.$$

Donc $\lambda \notin Sp(x,e)$. Réciproquement, si $\lambda \notin \sigma$ soit $h(\mu) = \chi_\sigma(\mu)(\lambda-\mu)^{-1}$ pour $\mu \in Sp(x,e)$. Alors $h(x)(\lambda e - x) = p$ donc

$$P(p)h(x)(\lambda p - P(p)x) = ph(x)p((\lambda p - pxp) = ph(x)(\lambda e - x)p = p.$$

(3) L'affirmation est vraie pour $f = 1$ et $f = \hat{x}$ d'après (2). Elle est donc vraie pour toute fonction puisque $C(Sp(x,e))$ et $C(\sigma)$ sont engendrées comme C^*-algèbres par 1 et $\hat{x}$, et χ_σ et $\hat{px}$ respectivement. ∎

Il en résulte que σ_ε est discret et si $\sigma_\varepsilon = \{e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n}\}$ (où les valeurs sont distinctes) alors $\mu(x,e) = \sum_{j=1,\ldots,n} \mu(y,e,\theta_j)$. En résumé,

Lemma 4.11. *Soit (x,e) une paire d'unités telle que 1 soit une valeur propre isolée de $Sp(x,e)$ de multiplicité finie. Alors il existe $0 < \varepsilon < \pi$ et un voisinage $\mathcal{V}$ de x dans Σ tels que pour toute unité $y \in \mathcal{V}$, $Sp(y,e) \cap \mathcal{A}_\varepsilon$ consiste en un nombre fini de valeurs propres isolées de multiplicités finies et*

$$\mu(x,e) = \sum_{|\theta| \leq \varepsilon} \mu(y,e,\theta).$$

5. L'indice de Maslov

On considère dans cette partie un chemin continu $x: \ [0,1] \to \Sigma$ tel que pour tout $t \in [0,1]$, $(x(t), e)$ soit une paire de Fredholm. En particulier, pour tout t, 1 est une valeur propre isolée de multiplicité finie de $x(t)$ par rapport à e. Les résultats suivant généralisent ceux de [12] et grâce à la partie précédente les démonstrations sont semblables et parfois laissées au lecteur.

Lemma 5.1. *Il existe une subdivision* $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_N = 1$ *et des réels* $\varepsilon_j \in]0, \pi[$, $j = 1 \ldots N$ *tels que* $\forall t \in [t_{j-1}, t_j]$

$$\mu(x(t), e, \pm\varepsilon_j) = 0,$$

et $Sp(x(t), e) \cap \mathcal{A}_{\varepsilon_j}$ *consiste en un nombre fini de valeurs propres isolées de multiplicités finies.*

Proof. La démonstration suit les idées de [12, lemma 3.1] en utilisant le lemme 4.11. On l'applique à chaque $(x(t), e)$ pour $t \in [0,1]$ et on obtient des voisinages $\mathcal{V}_t$ et des ε_t. On extrait un recouvrement fini de $[0,1]$:

$$\left[0 = s_0, s_0 + \delta_0^+\right[, \ldots, \left]s_i - \delta_i^-, s_i + \delta_i^+\right[, \ldots, \left]s_{N-1} - \delta_{N-1}^-, s_{N-1} = 1\right]$$

et on pose

$$t_0 = s_0 = 0, t_1 = s_0 + \delta_0^+, \ldots, t_{N-1} = s_{N-2} + \delta_{N-2}^+, t_N = s_{N-1} = 1$$

et $\varepsilon_j = \varepsilon_{s_{j-1}}$. ■

On dira qu'une telle subdivision $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_N = 1$ est admissible pour les ε_j, $j = 1, \ldots, N$. Posons

$$k(t, \varepsilon_j) = \sum_{0 \le \theta \le \varepsilon_j} \mu(x(t), e, \theta) \quad \text{pour } t_{j-1} \le t \le t_j.$$

Lemma 5.2. *Soit* $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_N = 1$ *une subdivision admissible pour les* ε_j, $j = 1, \ldots, N$ *et les* $\widetilde{\varepsilon}_j$, $j = 1, \ldots, N$. *Alors pour tout* $1 \le j \le N$,

$$k(t_j, \varepsilon_j) - k(t_{j-1}, \varepsilon_j) = k(t_j, \widetilde{\varepsilon}_j) - k(t_{j-1}, \widetilde{\varepsilon}_j)$$

Proof. Supposons que $\varepsilon_j \ge \widetilde{\varepsilon}_j$. Alors

$$k(t, \varepsilon_j) - k(t, \widetilde{\varepsilon}_j) = \sum_{\widetilde{\varepsilon}_j \le \theta \le \varepsilon_j} \mu(x(t), e, \theta).$$

Mais si γ est le cercle de diamètre $\left[e^{i\varepsilon_j}, e^{i\widetilde{\varepsilon}_j}\right]$, et $p_t = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma (\lambda e - x(t))^{-1} \mathrm{d}\lambda$ alors $\sum_{\widetilde{\varepsilon}_j \le \theta \le \varepsilon_j} \mu(x(t), e^{i\theta} e) = \operatorname{rang}(p_t)$. Mais $t \mapsto p_t$ est continue donc le rang de p_t est constant. ■

Proposition-Définition 5.3. *La quantité*

$$Mas(x(t), e) = \sum_{j=1}^{N} (k(t_j, \varepsilon_j) - k(t_{j-1}, \varepsilon_j))$$

ne dépend ni des t_j, *ni des* ε_j, *pourvu que la subdivision* $t_0, \ldots, t_N$ *soit admissible pour les* ε_j. *On l'appelle l'indice de Maslov du chemin* $x(t)$ *par rapport au point* e.

Proof. La démonstration utilise le lemme précédent comme dans [12, Proposition 3.3]. ■

Theorem 5.4. *L'indice de Maslov (par rapport à un point fixé) est additif pour la concaténation des chemins et invariant par homotopie.*

Le Lemme 4.11 permet encore une fois d'adapter la démonstration de [12, Theorem 3.6].

6. La dimension finie

Dans cette partie on suppose E de dimension finie. Σ est alors la frontière de Shilov du domaine $\mathcal{D}$. Soient x et e dans Σ. Il existe d'uniques nombres complexes $u_1, \ldots, u_k$, de module 1 et tous distincts, et un unique système complet d'idempotents orthogonaux $c_1, \ldots, c_k$ de l'algèbre de Jordan $A(e)$ tels que (cf. [11, Proposition X.2.3 et Theorem III.1.1])

$$x = u_1 c_1 + \cdots + u_k c_k.$$

L'indice de transversalité est alors

$$\mu(x, e, \theta) = \mu(x, e^{i\theta} e) = \sum_{j \text{ tq } u_j = e^{i\theta}} \operatorname{rang}(c_j).$$

Dans [9] l'indice de transversalité est défini au moyen de la transformée de Cayley en généralisant la *distance arithmétique* étudiée par Hua.

Example 6.1. *On calcule l'indice de Maslov dans le cas du cercle pour les chemins suivants :*

(i) $x(t) = e^{it\varphi} e$, *où* $\varphi \in [0, \pi[$.
On choisit $\varphi < \varepsilon < \pi$ *et alors*

$$\mu(x(t), e^{\pm i\varepsilon} e) = 0 \textit{ pour } t \in [0, 1]$$

et donc

$$Mas(x(t), e) = \sum_{0 \leq \theta \leq \varepsilon} \mu(e^{i\varphi} e, e^{i\theta} e) - \sum_{0 \leq \theta \leq \varepsilon} \mu(e, e^{i\theta} e) = 1 - 1 = 0$$

(ii) $x(t) = e^{it\varphi + \psi} e$, *où* $\psi \in]0, 2\pi[$ *et* $0 < \varphi < 2\pi - \psi$.
On choisit $0 < \varepsilon < \min\{\psi, 2\pi - (\varphi + \psi)\}$ *et alors*

$$\mu(x(t), e^{\pm i\varepsilon} e) = 0 \textit{ pour } t \in [0, 1]$$

et donc

$$Mas(x(t), e) = \sum_{0 \leq \theta \leq \varepsilon} \mu(e^{i\varphi + \psi} e, e^{i\theta} e) - \sum_{0 \leq \theta \leq \varepsilon} \mu(e^{i\psi} e, e^{i\theta} e) = 0 - 0 = 0$$

(iii) $x(t) = e^{-it\varphi} e$, *où* $\varphi \in [0, \pi[$.
On choisit $\varphi < \varepsilon < \pi$ *et alors*

$$\mu(x(t), e^{\pm i\varepsilon} e) = 0 \textit{ pour } t \in [0, 1]$$

et donc

$$Mas(x(t),e) = \sum_{0\leq\theta\leq\varepsilon} \mu(e^{i\varphi}e, e^{i\theta}e) - \sum_{0\leq\theta\leq\varepsilon} \mu(e, e^{i\theta}e) = 0 - 1 = -1.$$

On peut alors construire un indice pour les couples de points dans le revêtement universel $\widetilde{\Sigma}$ de Σ (dont une construction se trouve dans [9]). Si $\widetilde{\sigma}$ et $\widetilde{\tau}$ ont pour projections respectives σ et τ alors on pose $Mas(\widetilde{\sigma},\widetilde{\tau},e) = Mas(x(t),e)$ où x est n'importe quel chemin d'extrémités σ et τ dont le relèvement d'origine $\widetilde{\sigma}$ se termine en $\widetilde{\tau}$. On note $m(\widetilde{\sigma},\widetilde{\tau})$ l'indice de Souriau généralisé[1] construit dans [9] et $\iota(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$ l'indice triple de [8].

On suppose désormais que E est simple, autrement dit que $A(e)$ est simple (ie. ne contient pas d'idéal non trivial). Alors la composante connexe $K^{(e)}$ du groupe des automorphismes de $A(e)$ agit de manière transitive sur l'ensembles des repères de Jordan de $A(e)$ (systèmes complets d'idempotents primitifs, cf. [11]).

Theorem 6.2. *Soient $\widetilde{\sigma}$ et $\widetilde{\tau}$ dans $\widetilde{\Sigma}$, de projections respectives σ et τ, et soit e dans Σ. Alors*

$$Mas(\widetilde{\sigma},\widetilde{\tau},e) = \frac{1}{2}(m(\widetilde{\sigma},\widetilde{\tau}) + \iota(e,\tau,\sigma) + \mu(\tau,e) - \mu(\sigma,e)). \tag{E}$$

Proof. Soient

$$\widetilde{\sigma} = (\sigma = \sum e^{i\varphi_j}c_j, r\varphi) \quad \text{et} \quad \widetilde{\tau} = (\tau = \sum e^{i\phi_j}d_j, r\phi)$$

deux points de $\widetilde{\Sigma}$, (c_j) et (d_j) étant deux repères de Jordan de $A(e)$. Posons $\widetilde{\tau}' = (\tau' = \sum e^{i\phi_j}c_j, r\phi)$. Il existe $k \in K^{(e)}$ tel que $kd_j = c_j$, $j = 1\ldots r$, et soit $t \mapsto k_t$ un chemin dans $K^{(e)}$ tel que $k_0 = \mathrm{id}$ et $k_1 = k$. Alors $t \mapsto (\sum e^{i\phi_j}k_t d_j, r\phi)$ est un chemin dans $\widetilde{\Sigma}$ et on note $t \mapsto x(t)$ sa projection. Alors $Mas(\{x(t)\},e)$ est nul car $\mu(x(t),e)$ est constant. De plus $m(\widetilde{\tau},\widetilde{\tau}') + \iota(e,\tau',\tau) + \mu(\tau',e) - \mu(\tau,e) = m(\widetilde{e},\widetilde{\tau}') - m(\widetilde{e},\widetilde{\tau})$, où $\widetilde{e}$ est un point quelconque au dessus de e, et cette dernière quantité est nulle. Comme le second membre de (E) est aussi additif pour la concaténation des chemins, il suffit de démontrer (E) en remplaçant $\widetilde{\tau}$ par $\widetilde{\tau}'$. Supposons que $\varphi_j \in [0,2\pi[$ et que $r\varphi = \sum \varphi_j$, ce qui est possible sans perte de généralité. On considère le chemin

$$t \mapsto \sum e^{i(1-t)\varphi_j}c_j$$

Son relevé d'origine $\widetilde{\sigma}$ se termine en $(e,0)$, et son indice de Maslov est nul puisqu'il se décompose en une succession de chemins unidimensionnels d'indices de Maslov nuls. D'autre part, si on pose $l = card\{j \mid \varphi_j = 0 \ \ [2\pi]\}$ alors

$$m(\widetilde{\sigma},(e,0)) + \iota(e,e,\sigma) + \mu(e,e) - \mu(\sigma,e) = -(r-l) + 0 + r - l = 0,$$

et donc il reste à montrer que le formule est vrai si $\widetilde{\sigma} = (e,0)$. Supposons que $\phi_j \in [0,2\pi[$ et que $r\phi = \sum \phi_j + 2k\pi$. L'indice de Maslov du chemin

$$t \mapsto \sum e^{it\phi_j}$$

[1] Dans le cas de la Lagrangienne, cet indice est en fait le double de l'indice de Souriau.

est nul, et si $l = card\{j \mid \phi_j = 0\,[2\pi]\}$ alors

$$m((e,0),(\tau,\sum\phi_j)) + \iota(e,\tau,e) + \mu(\tau,e) - \mu(e,e) = r - l + 0 + l - r = 0.$$

Considérons enfin le chemin

$$t \mapsto e^{i\phi_1 + 2kt\pi} + \sum_{j=2}^{r} e^{i\phi_j},$$

dont le relevé d'origine $(\tau, \sum\phi_j)$ se termine en $\widetilde{\tau}$. Son indice de Maslov vaut k, tout comme le membre de droite de (E). ∎

Remark 6.3. *En faisant $\sigma = \tau$ dans l'équation* (E) *on voit que l'indice d'un lacet ne dépend pas du point par rapport auquel on le calcule.*

Remark 6.4. *En faisant $\sigma = e$, on obtient*

$$Mas(\widetilde{\sigma},\widetilde{\tau},\sigma) = \frac{1}{2}(m(\widetilde{\sigma},\widetilde{\tau}) + \mu(\tau,\sigma) - r)$$

et donc on peut retrouver l'indice de Souriau, puis l'indice triple par la formule de Leray, grâce à ce nouvel indice.

Un indice triple a été construit en dimension infinie par Neeb et Ørsted (cf. [21]), mais il est à valeur dans le groupe fondamental du groupe structural de E.

Problem 6.5. *Associer une quantité numérique à cet indice, et pouvoir retrouver cet indice triple numérique grâce à l'indice pour les chemins.*

References

[1] Arnol'd, V. I., *On a characteristic class entering into conditions of quantization*, Akademija Nauk SSSR. Funkcional'nyi Analiz i ego Prilozenija **1** (1967), 1–14.

[2] —, *Sturm theorems and symplectic geometry*, Akademiya Nauk SSSR. Funktsional'nyĭ Analiz i ego Prilozheniya **19** (1985), 1–10, 95.

[3] Booss-Bavnbek, B., and K. Furutani, *The Maslov index: a functional analytical definition and the spectral flow formula*, Tokyo Journal of Mathematics **21** (1998), 1–34.

[4] Braun, R., W. Kaup, and H. Upmeier, *A holomorphic characterization of Jordan C^*-algebras*, Mathematische Zeitschrift **161** (1978), 277–290.

[5] Chu, C.-H., *Grassmann manifolds of Jordan algebras*, Archiv der Mathematik **87** (2006), 179–192.

[6] Clerc, J.-L., and B. Ørsted, *The Maslov index revisited*, Transformation Groups **6** (2001), 303–320.

[7] Clerc, J.-L., and B. Ørsted, *The Gromov norm of the Kaehler class and the Maslov index*, The Asian Journal of Mathematics **7** (2003), 269–295.

[8] Clerc, J.-L., *L'indice de Maslov généralisé*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. Neuvième Série **83** (2004), 99–114.

[9] Clerc, J.-L., and K. Koufany, *Primitive du cocycle de Maslov généralisé*, Mathematische Annalen **337** (2007), 91–138.

[10] Dunford, N., and J. T. Schwartz, "Linear operators. Part II," Wiley-Interscience, 1988.

[11] Faraut, J., and A. Korányi, "Analysis on symmetric cones," Oxford University Press, 1994.

[12] Furutani, K., *Fredholm-Lagrangian-Grassmannian and the Maslov index*, Journal of Geometry and Physics **51** (2004), 269–331.

[13] Hanche-Olsen, H., and E. Størmer, "Jordan operator algebras," Pitman, 1984.

[14] Jacobson, N., "Structure and representations of Jordan algebras," American Mathematical Society, 1968.

[15] Kaup, W., *Algebraic characterization of symmetric complex Banach manifolds*, Mathematische Annalen **228** (1977), 39–64.

[16] —, *A Riemann mapping theorem for bounded symmetric domains in complex Banach spaces*, Mathematische Zeitschrift **183** (1983), 503–529.

[17] Kaup, W., and H. Upmeier, *Jordan algebras and symmetric Siegel domains in Banach spaces*, Mathematische Zeitschrift **157** (1977), 179–200.

[18] Leray, J., "Analyse lagrangienne et mécanique quantique," Séminaire sur les Équations aux Dérivées Partielles (1976–1977), Exp. no. **1**, Collège de France.

[19] Loos, Ottmar, "Jordan pairs," Lecture Notes in Mathematics, Vol. **460**, Springer-Verlag, 1975.

[20] —, "Bounded symmetric domains and Jordan pairs," Lectures Note, Irvine, 1977.

[21] Neeb, K.-H., and B. Ørsted, *A topological Maslov index for 3-graded Lie groups*, Journal of Functional Analysis **233** (2006), 426–477.

[22] Souriau, J.-M., *Construction explicite de l'indice de Maslov. Applications* in: "Group theoretical methods in physics (Fourth Internat. Colloq., Nijmegen, 1975)," Lecture Notes in Physics, Vol. **50**, Springer-Verlag, 1976, 117–148.

[23] Upmeier, H., *Über die Automorphismengruppen von Banach-Mannigfaltigkeiten mit invarianter Metrik*, Mathematische Annalen **223** (1976), 279–288.

[24] —, "Symmetric Banach manifolds and Jordan C^*-algebras," North-Holland, 1985.

[25] Vigué, Jean-Pierre, *Le groupe des automorphismes analytiques d'un domaine borné d'un espace de Banach complexe. Application aux domaines bornés symétriques*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure. Quatrième Série **9** (1976), 203–281.

[26] Wright, J. D. M., *Jordan C^*-algebras*, Michigan Mathematical Journal **24** (1977), 291–302.

Stephane Merigon
Institut Elie Cartan Nancy
Nancy-Universit, CNRS, INRIA
Boulevard des Aiguillettes, B.P. 239,
F-54506 Vandoeuvre-ls-Nancy, France
Stephane.Merigon@iecn.u-nancy.fr

Received April 5, 2007
and in final form December 11, 2007