Journal of Lie Theory
Volume **18** (2008) 523–539

La Grassmannienne non-linéaire comme variété fréchétique homogène

Mathieu Molitor

Communicated by K.-H. Neeb

Résumé. Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension n. Pour $k \in \{0, ..., n\}$, notons $Gr_k(M)$ l'ensemble des sous-variétés compactes, connexes, orientées de M et de dimension k. Cet ensemble est appelé la Grassmannienne non-linéaire. Dans cet article, nous munissons $Gr_k(M)$ d'une structure de variété fréchétique et développons les propriétés les plus immédiates de cette variété. Notamment, si $\Sigma \in Gr_k(M)$, nous montrons que $\mathrm{Emb}(\Sigma, M)$, l'espace des plongements de Σ dans M, est l'espace total d'un fibré principal ayant pour base la réunion de certaines composantes connexes de $Gr_k(M)$. Nous montrons aussi que les composantes connexes de $Gr_k(M)$ sont homogènes sous l'action naturelle du groupe des difféomorphismes de M.
Mathematics Subject Index 2000 : 46T05, 58B10, 58B20, 58D15, 58D19.
Keywords and phrases : Grassmannienne non-linéaire, espace des plongements, variétés fréchétiques, fibré principal, homogène.

Introduction

Pour une variété M donnée, l'étude des sous-variétés de M, du point de vue de la géométrie de dimension infinie, amène très naturellement à considérer l'ensemble des sous-variétés compactes, connexes et orientées de M comme une variété fréchétique. Cet ensemble est appelé la Grassmannienne non-linéaire et est notée $Gr_k(M)$ (k étant la dimension des sous-variétés considérées). Il y a essentiellement deux façons d'appréhender $Gr_k(M)$:

- la première, qui est amplement développée dans la littérature, consiste à prendre $\Sigma \in Gr_k(M)$ et à considérer l'espace des plongements $\mathrm{Emb}\,(\Sigma, M)$. On peut alors identifier $Gr_k(M)$ (ou plutôt la réunion de certaines composantes connexes de $Gr_k(M)$) comme étant le quotient de $\mathrm{Emb}\,(\Sigma, M)$ par rapport à l'action naturelle du groupe $\mathrm{Diff}^+(\Sigma)$ des difféomorphismes de Σ qui préservent une forme de volume donnée, sur $\mathrm{Emb}\,(\Sigma, M)$. Par construction même, on obtient ainsi une structure lisse de fibré principal $\mathrm{Diff}^+(\Sigma) \hookrightarrow \mathrm{Emb}\,(\Sigma, M) \to \mathrm{Emb}\,(\Sigma, M)/\mathrm{Diff}^+(\Sigma)$ (voir, par exemple, le Theorem 44.1., page 474 de [10]). Cette construction apparaît de façon implicite dans [15], et est clairement explicitée dans [2] pour des variétés compactes. Le cas non-

ISSN 0949–5932 / \$2.50

compact est traité dans [11], [12] et [10] .

- La deuxième approche, plus intuitive, consiste à modeler directement $Gr_k(M)$ sur des espaces de sections $\Gamma_{C^\infty}(\Sigma, N\Sigma)$ où $\Sigma \in Gr_k(M)$ et $N\Sigma$ désigne le fibré normal de Σ dans M . Cette approche apparaît pour la première fois dans [9], et est esquissée dans la catégorie des variétés fréchétiques modérées ("tame" en anglais) par Hamilton dans [5] .

La première partie de cet article s'attache à décrire très explicitement la construction ébauchée par Hamilton dans la catégorie des variétés fréchétiques modérées (voir [5]). La deuxième partie fait le lien entre les deux points de vue cités. Nous y montrons notamment un théorème analogue au Theorem 44.1. de [10] , c'est-à-dire, nous montrons que l'espace des plongements $\mathrm{Emb}\,(\Sigma, M)$ est un fibré principal, de groupe de structure $\mathrm{Diff}^+(\Sigma)$ et dont la base est une réunion de certaines composantes connexes de $Gr_k(M)$. Enfin dans la troisième partie, nous montrons que les composantes connexes de $Gr_k(M)$ sont homogènes sous l'action naturelle (et lisse) de $\mathrm{Diff}^0(M)$, la composante connexe en l'élément neutre du groupe des difféomorphismes de M . Cette homogénéité est déjà mentionnée, mais admise sans preuve, dans [7] . En revanche, en adoptant le point de vue de [10] qui définit la Grassmannienne non-linéaire comme le quotient de $\mathrm{Emb}\,(\Sigma, M)$ par l'action de $\mathrm{Diff}^+(\Sigma)$, l'homogénéité des composantes connexes de $\mathrm{Emb}\,(\Sigma, M)$ sous $\mathrm{Diff}^0(M)$ (homogénéité qui est une conséquence directe d'un résultat classique de topologie différentielle sur les extensions des isotopies en difféotopies, voir [6], Theorem 1.3. page 180) implique automatiquement l'homogénéité des composantes connexes correspondantes du quotient $\mathrm{Emb}\,(\Sigma, M)/\mathrm{Diff}^+(\Sigma)$. C'est cette approche qui est utilisée dans [4] . Ici encore, et contrairement à cette dernière, nous utilisons l'approche de [5] et regardons $Gr_k(M)$ comme une collection de sous-variétés dont la structure différentielle est celle expliquée dans la Section 1. Ce faisant, un travail supplémentaire est nécessaire pour montrer l'homogénéité des composantes de $Gr_k(M)$.

La notion de calcul différentiel sur un espace de Fréchet n'étant pas "canonique", nous joignons un très court appendice traitant des deux notions de calcul différentiel les plus courantes sur un espace de Fréchet (celle développée par exemple dans [5], et celle utilisant la notion de courbes lisses qui est développée dans [10]). Ces deux notions étant identiques (sur un espace de Fréchet), nous utiliserons indifféremment l'une ou l'autre dans ce texte.

1. La structure de variété de $Gr_k(M)$

Pour munir $Gr_k(M)$ d'une structure de variété, nous allons construire explicitement un atlas sur $Gr_k(M)$. Pour ce faire, prenons $\Sigma \in Gr_k(M)$ et introduisons les notations et objets suivants :

- Θ_Σ un ouvert contenant la section nulle du fibré normal $N\Sigma$ de Σ dans M , convexe fibre par fibre et tel que l'application

$$\tau_\Sigma \,:\, \Theta_\Sigma \to M\,, v \in N\Sigma_x \mapsto \exp_x(v)$$

soit un difféomorphisme de Θ_Σ sur son image ;

- $\mathcal{U}_\Sigma := \{ s \in \Gamma_{C^\infty}(\Sigma, N\Sigma) \,|\, s(\Sigma) \subseteq \Theta_\Sigma \}$;

- $\varphi_\Sigma : \mathcal{U}_\Sigma \to Gr_k(M)$, application définie par $\varphi_\Sigma(s) = \tau_\Sigma\big(s(\Sigma)\big)$, cette dernière sous-variété étant munie de l'orientation induite par le difféomorphisme $\Sigma \to \tau_\Sigma\big(s(\Sigma)\big), x \mapsto \tau_\Sigma\big(s(x)\big)$.

Montrons que $\{(\varphi_\Sigma(\mathcal{U}_\Sigma), \varphi_\Sigma^{-1}) \,|\, \Sigma \in Gr_k(M)\}$ est un atlas différentiable de $Gr_k(M)$ au moyen des deux lemmes suivants.

Lemme 1.1. *Pour $\Sigma_1, \Sigma_2 \in Gr_k(M)$, l'ensemble $\varphi_{\Sigma_1}^{-1}\big(\varphi_{\Sigma_1}(\mathcal{U}_{\Sigma_1}) \cap \varphi_{\Sigma_2}(\mathcal{U}_{\Sigma_2})\big)$ est un ouvert de $\Gamma_{C^\infty}(\Sigma_1, N\Sigma_1)$.*

Démonstration. Montrons le par l'absurde en supposant que

$$\varphi_{\Sigma_1}^{-1}\big(\varphi_{\Sigma_1}(\mathcal{U}_{\Sigma_1}) \cap \varphi_{\Sigma_2}(\mathcal{U}_{\Sigma_2})\big)$$

ne soit pas un ouvert de l'espace métrique $\Gamma_{C^\infty}(\Sigma_1, N\Sigma_1)$. On peut alors trouver une section $s \in \varphi_{\Sigma_1}^{-1}\big(\varphi_{\Sigma_1}(\mathcal{U}_{\Sigma_1}) \cap \varphi_{\Sigma_2}(\mathcal{U}_{\Sigma_2})\big)$ et une suite de sections $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $s_n \to s$ dans $\Gamma_{C^\infty}(\Sigma_1, N\Sigma_1)$ et $s_n \notin \varphi_{\Sigma_1}^{-1}\big(\varphi_{\Sigma_1}(\mathcal{U}_{\Sigma_1}) \cap \varphi_{\Sigma_2}(\mathcal{U}_{\Sigma_2})\big)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Prenons aussi U un voisinage ouvert de $\Sigma := \varphi_{\Sigma_1}(s)$ inclu dans $\tau_{\Sigma_1}(\Theta_{\Sigma_1}) \cap \tau_{\Sigma_2}(\Theta_{\Sigma_2})$. L'ouvert U peut être vu simultanément comme une fibration (non-linéaire) au-dessus de Σ_1 et de Σ_2 munie des projections π_1 et π_2 :

$$\pi_i : U \to \Sigma_i \, .$$

Remarquons que $\pi_i|_\Sigma : \Sigma \to \Sigma_i$ est un difféomorphisme et que pour $x \in U$ on a :

$$\pi_i(x) = \pi_{\mathrm{N}\Sigma_i}\Big(\tau_{\Sigma_i}^{-1}(x)\Big) ,$$

où $\pi_{\mathrm{N}\Sigma_i} : N\Sigma_i \to \Sigma_i$ est la projection canonique. Nous allons montrer que l'application

$$\Sigma_1 \to \Sigma_2, \; m \mapsto (\pi_2 \circ \tau_{\Sigma_1} \circ s_n)(m)$$

est un difféomorphisme pour n assez grand. Remarquons déjà que puisque $s_n \to s$ dans $\Gamma_{C^\infty}(\Sigma_1, N\Sigma_1)$, $\tau_{\Sigma_1}\big(s_n(\Sigma_1)\big) \subseteq U$ pour n assez grand, et donc l'application ci-dessus a un sens. Nous allons travailler localement. Prenons $x \in \Sigma_1$. Puisque $s_n \to s$ dans $\Gamma_{C^\infty}(\Sigma_1, N\Sigma_1)$, il existe $y \in \Sigma_2$ tel que $(\pi_2 \circ \tau_{\Sigma_1} \circ s_n)(x) \to y$. Prenons alors des cartes trivialisante :

$$\begin{tikzcd} \pi_{N\Sigma_1}^{-1}(W) \arrow[rr, "\Psi_W"] \arrow[dr, "\pi_{N\Sigma_1}"'] & & W \times \mathbb{R}^{n-k} \arrow[dl, "pr_1"] \\ & W & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \pi_{N\Sigma_2}^{-1}(\Omega) \arrow[rr, "\Psi_\Omega"] \arrow[dr, "\pi_{N\Sigma_2}"'] & & \Omega \times \mathbb{R}^{n-k} \arrow[dl, "pr_1"] \\ & \Omega & \end{tikzcd}$$

avec $x \in W \subseteq \Sigma_1 \, , y \in \Omega \subseteq \Sigma_2$ et telle que $(\pi_2 \circ \tau_{\Sigma_1} \circ s_n)(W) \subseteq \Omega$ à partir d'un certain rang.

Nous avons alors :

$$(\pi_2 \circ \tau_{\Sigma_1} \circ s_n)(x) = \Big(\underbrace{\pi_{N\Sigma_2} \circ \Psi_\Omega^{-1}}_{(z,w)\mapsto z} \circ \underbrace{\Psi_\Omega \circ \tau_{\Sigma_2}^{-1} \circ \tau_{\Sigma_1} \circ \Psi_W^{-1}}_{(y,v)\mapsto(\tau^1(y,v),\tau^2(y,v))} \circ \underbrace{\Psi_W \circ s_n}_{x\mapsto(x,\tilde{s}_n(x))} \Big)(x) \, .$$

Cette application a pour différentielle :

$$
\begin{aligned}
(Id\ 0)\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\tau^1}{\partial x} & \dfrac{\partial\tau^1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\tau^2}{\partial x} & \dfrac{\partial\tau^2}{\partial y} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Id \\ (\tilde{s}_n)_{*_x} \end{pmatrix} &= (Id\ 0)\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\tau^1}{\partial x} + \dfrac{\partial\tau^1}{\partial y}(\tilde{s}_n)_{*_x} \\ \dfrac{\partial\tau^2}{\partial x} + \dfrac{\partial\tau^2}{\partial y}(\tilde{s}_n)_{*_x} \end{pmatrix} \\
&= \frac{\partial\tau^1}{\partial x} + \frac{\partial\tau^1}{\partial y}(\tilde{s}_n)_{*_x} \\
&\to \frac{\partial\tau^1}{\partial x} + \frac{\partial\tau^1}{\partial y}(\tilde{s})_{*_x}\,.
\end{aligned}
$$

La flèche ci-dessus signifie uniquement que nous avons convergence dans un espace de matrices vers la matrice $\frac{\partial\tau^1}{\partial x} + \frac{\partial\tau^1}{\partial y}(\tilde{s})_{*_x}$ qui est inversible puisque cette matrice représente la différentielle du difféomorphisme $\big(\pi_2|_\Sigma\big)\circ\big(\pi_1|_\Sigma\big)^{-1} : \Sigma_1 \to \Sigma_2$. On en déduit qu'à partir d'un certain rang, l'application $\Sigma_1 \to \Sigma_2$, $m \mapsto (\pi_2\circ\tau_{\Sigma_1}\circ s_n)(m)$ est partout un difféomorphisme local. Pour montrer que c'est un difféomorphisme global, il suffit de montrer que cette application est injective. Si ce n'était jamais le cas, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pourrait trouver $x_n, y_n \in \Sigma_1$, $x_n \neq y_n$ tels que :

$$(\pi_2\circ\tau_{\Sigma_1}\circ s_n)(x_n) = (\pi_2\circ\tau_{\Sigma_1}\circ s_n)(y_n)$$

pour tout $n\in\mathbb{N}$. Par compacité, nous pouvons supposer que $x_n \to x \in \Sigma_1$ et $y_n \to y \in \Sigma_1$. En utilisant les semi-normes qui définissent la topologie de $\Gamma_{C^\infty}(\Sigma_1, N\Sigma_1)$ (voir par exemple [3], page 236), on constate facilement que :

$$s_n(x_n) \to s(x) \quad \text{et} \quad s_n(y_n) \to s(y)$$

et donc

$$
\begin{array}{rrcl}
 & (\pi_2\circ\tau_{\Sigma_1}\circ s_n)(x_n) & = & (\pi_2\circ\tau_{\Sigma_1}\circ s_n)(y_n) \\
 & \downarrow & & \downarrow \\
 & \big(\pi_2\circ\tau_{\Sigma_1}\big)\big(s(x)\big) & = & \big(\pi_2\circ\tau_{\Sigma_1}\big)\big(s(y)\big) \\
\Rightarrow & \big(\pi_2|_\Sigma\circ\tau_{\Sigma_1}\big)\big(s(x)\big) & = & \big(\pi_2|_\Sigma\circ\tau_{\Sigma_1}\big)\big(s(y)\big) \\
\Rightarrow & s(x) & = & s(y) \\
\Rightarrow & x & = & y\,.
\end{array}
$$

Ici on a utilisé le fait que $\pi_2|_\Sigma : \Sigma \to \Sigma_2$ et τ_{Σ_1} sont des difféomorphismes.

De plus, nous pouvons supposer (voir Appendice, Proposition 3.11), qu'il existe une courbe lisse $\sigma : \mathbb{R} \to \Theta_{\Sigma_1} \subseteq \Gamma_{C^\infty}(\Sigma_1, N\Sigma_1)$ de $\Gamma_{C^\infty}(\Sigma_1, N\Sigma_1)$ telle que $\sigma_{\frac{1}{n}} = s_n$ et $\sigma_0 = s$.

Considérons alors l'application suivante :

$$\Lambda : \mathbb{R}\times\Sigma_1 \to \mathbb{R}\times\Sigma_2\,,\ (t,x) \mapsto \big(t,\ (\pi_2\circ\tau_{\Sigma_1}\circ\sigma_t)(x)\big)\,.$$

On a que

$$\Lambda_{*(0,x)} = \begin{pmatrix} \mathrm{Id} & 0 \\ * & (\pi_2\circ\tau_{\Sigma_1}\circ s)_{*_x} \end{pmatrix}$$

est un isomorphisme puisque l'application $\pi_2 \circ \tau_{\Sigma_1} \circ s = (\pi_2|_\Sigma) \circ (\pi_1|_\Sigma)^{-1}$ est un difféomorphisme. On en déduit que Λ est un difféomorphisme local en $(0,x)$. Mais alors, de part l'équivalence suivante :

$$(\pi_2 \circ \tau_{\Sigma_1} \circ s_n)(x_n) = (\pi_2 \circ \tau_{\Sigma_1} \circ s_n)(y_n) \quad \Leftrightarrow \quad \Lambda\left(\frac{1}{n}, x_n\right) = \Lambda\left(\frac{1}{n}, y_n\right),$$

il en résulte que pour n assez grand, $x_n = y_n$, Λ devenant injective au voisinage de $(0,x) = (0,y)$, d'où une contradiction. On en déduit donc que pour n assez grand, $\pi_2 \circ \tau_{\Sigma_1} \circ s_n : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ est un difféomorphisme.

Ce dernier résultat entraine que $\varphi_{\Sigma_1}^{-1}\big(\varphi_{\Sigma_1}(\mathcal{U}_{\Sigma_1}) \cap \varphi_{\Sigma_2}(\mathcal{U}_{\Sigma_2})\big)$ est un ouvert de $\Gamma_{C^\infty}(\Sigma_1, N\Sigma_1)$ car

$$\begin{aligned} &\varphi_{\Sigma_1}(s_n) = \varphi_{\Sigma_2}\big(\tau_{\Sigma_2}^{-1} \circ \tau_{\Sigma_1} \circ (\pi_2 \circ \tau_{\Sigma_1} \circ s_n)^{-1}\big) \in \varphi_{\Sigma_2}\big(U_{\Sigma_2}\big) \\ \Rightarrow \quad &s_n \in \varphi_{\Sigma_1}^{-1}\big(\varphi_{\Sigma_1}(\mathcal{U}_{\Sigma_1}) \cap \varphi_{\Sigma_2}(\mathcal{U}_{\Sigma_2})\big) \end{aligned}$$

ce qui est une contradiction avec notre hypothèse. ■

Lemme 1.2. *L'application*

$$\varphi_{\Sigma_2}^{-1} \circ \varphi_{\Sigma_2} : \varphi_{\Sigma_1}^{-1}\big(\varphi_{\Sigma_1}(\mathcal{U}_{\Sigma_1}) \cap \varphi_{\Sigma_2}(\mathcal{U}_{\Sigma_2})\big) \to \varphi_{\Sigma_2}^{-1}\big(\varphi_{\Sigma_1}(\mathcal{U}_{\Sigma_1}) \cap \varphi_{\Sigma_2}(\mathcal{U}_{\Sigma_2})\big)$$

est lisse modérée ("tame" en anglais, voir par exemple [5]).

Démonstration. Prenons $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma := \varphi_{\Sigma_1}(s)$ et U comme dans le Lemme 1.1. Nous allons montrer que l'application ci-dessus est lisse modérée sur un voisinage de s dans $\Gamma_{C^\infty}(\Sigma_1, N\Sigma_1)$. En fait, nous avons déjà vu qu'il existe un voisinage $\mathcal{W}$ de s dans $\Gamma_{C^\infty}(\Sigma_1, N\Sigma_1)$ tel que l'application $\sigma \in \mathcal{W} \mapsto \pi_2 \circ \tau_{\Sigma_1} \circ \sigma \in C^\infty(\Sigma_1, \Sigma_2)$ soit à valeurs dans $\mathrm{Diff}(\Sigma_1, \Sigma_2)$ et forme ainsi une application lisse modérée de $\mathcal{W} \subseteq \Gamma_{C^\infty}(\Sigma_1, N\Sigma_1)$ dans $\mathrm{Diff}(\Sigma_1, \Sigma_2)$. Il en résulte que l'application $\mathcal{W} \to \Gamma_{C^\infty}(\Sigma_2, N\Sigma_2)$, $\sigma \mapsto \tau_{\Sigma_2}^{-1} \circ \tau_{\Sigma_1} \circ (\pi_2 \circ \tau_{\Sigma_1} \circ \sigma)^{-1}$ est bien définie et est lisse modérée puisque l'inversion et la composition sont des applications lisses modérées dans le contexte fréchétique. On en déduit que l'application que nous considérons est bien lisse modérée. ■

Ainsi $\{(\varphi_\Sigma(\mathcal{U}_\Sigma), \varphi_\Sigma^{-1}) \,|\, \Sigma \in Gr_k(M)\}$ est un atlas différentiable de $Gr_k(M)$ et induit canoniquement une topologie $\mathcal{T}$ sur $Gr_k(M)$. Montrons que cette topologie est de Hausdorff.

Lemme 1.3. *La topologie $\mathcal{T}$ de $Gr_k(M)$ est de Hausdorff.*

Démonstration. Prenons $\Sigma_1, \Sigma_2 \in Gr_k(M)$ tels que $\Sigma_1 \neq \Sigma_2$. Si ces deux sous-variétés orientées se confondent en tant que sous-variétés, mais possèdent une orientation différente, alors $\varphi_{\Sigma_1}(\mathcal{U}_{\Sigma_1}) \cap \varphi_{\Sigma_2}(\mathcal{U}_{\Sigma_2}) = \emptyset$. En effet, supposons que Σ appartienne à cette intersection. Alors Σ serait munie de l'orientation induite par le difféomorphisme $\Sigma_1 \to \Sigma$, $x \mapsto \tau_{\Sigma_1}(s(x))$ où s est une certaine section du fibré normal de Σ_1. De plus, Σ serait aussi munie de l'orientation induite par le difféomorphisme $\Sigma_2 \to \Sigma$, $x \mapsto \tau_{\Sigma_2}(s(x))$, avec Σ_1 et Σ_2 étant les mêmes sous-variétés mais orientées différemment et $\tau_{\Sigma_1} = \tau_{\Sigma_2}$, d'où la contradiction.

Si $\Sigma_1 \neq \Sigma_2$ en tant que sous-variété, il existe $x_1 \in \Sigma_1 \backslash \Sigma_2$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$\exp_{x_1}(\mathrm{B}(x_1, \varepsilon)) \cap \tau_{\Sigma_2}(\Theta_{\Sigma_2}) = \emptyset\,,$$

où $\Theta_{\Sigma_2} \subseteq \{v \in N\Sigma_2 \,|\, \|x\| < \varepsilon\}$. Dès lors, si l'on choisit Θ_{Σ_1} tel que

$$\Theta_{\Sigma_1} \subseteq \{v \in N\Sigma_1 \,|\, \|x\| < \varepsilon\},$$

alors on peut constater que $\varphi_{\Sigma_1}(\mathcal{U}_{\Sigma_1}) \cap \varphi_{\Sigma_2}(\mathcal{U}_{\Sigma_2}) = \emptyset$. ■

En résumé,

Proposition 1.4. ([9], [5]) *L'ensemble $Gr_k(M)$ est une variété fréchétique lisse modérée et pour $\Sigma \in Gr_k(M)$, on a un isomorphisme canonique :*

$$T_\Sigma Gr_k(M) \cong \Gamma_{C^\infty}(\Sigma, N\Sigma)\,.$$

Remarque 1.5. Tout comme la structure de variété de $C^\infty(N, M)$ ne dépend pas de la métrique que l'on utilise sur M, la structure de variété de $Gr_k(M)$ ne dépend pas non plus de la métrique g.

Remarque 1.6. Notons $Gr_k^\vee(M)$ l'ensemble des sous-variétés connexes, compactes, orientables et de dimension k de M. Alors, exactement de la même manière que pour $Gr_k(M)$, on montre que cet ensemble est muni d'une structure de variété modérée et il est clair que $Gr_k(M)$ est un revêtement à deux feuillets de $Gr_k^\vee(M)$.

2. L'espace des plongements dans M comme fibré principal sur la Grassmannienne non-linéaire

Prenons $\Sigma \in Gr_k(M)$ et notons $\mathrm{Emb}(\Sigma, M)$ l'espace des plongements de Σ dans M. Notons aussi

$$p\,:\,\mathrm{Emb}(\Sigma, M) \to Gr_k(M)\,,$$

l'application qui est définie pour $f \in \mathrm{Emb}(\Sigma, M)$ par $p(f) := f(\Sigma)$, cette dernière sous-variété de M étant munie de l'orientation naturellement induite par le difféomorphisme $f\,:\,\Sigma \to f(\Sigma)$. Grâce à la proposition suivante et à ses corollaires, nous allons montrer que $\mathrm{Emb}(\Sigma, M)$ est une variété fréchétique lisse modérée et que l'application $p\,:\,\mathrm{Emb}(\Sigma, M) \to Gr_k(M)$ est lisse. Nous utiliserons pour cela le calcul convenable de Kriegl et Michor (voir [10]), car entre des variétés fréchétiques, une application est lisse au sens de Kriegl-Michor si et seulement si elle est lisse au sens de Hamilton (voir notre succinct appendice). Cela nous amènera à montrer dans un deuxième temps que $\mathrm{Emb}(\Sigma, M)$ est l'espace total d'un fibré principal ayant pour base la réunion de certaines composantes connexes de $Gr_k(M)$.

Proposition 2.1. *Soit $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibré vectoriel de rang fini au-dessus de M et $f \in C^\infty\big((-\varepsilon, \varepsilon) \times M, E\big)$ une application telle que $f_0\,:\,M \to E,\ x \mapsto f(0,x)$ soit la section nulle de E. Alors il existe $\eta > 0$ et $\varphi\,:\,(-\eta, \eta) \to \mathit{Diff}(M)$ un chemin lisse de $\mathit{Diff}(M)$ tel que :*

(i) $f_t \circ \varphi_t \in \Gamma_{C^\infty}(M, E)$ pour tout $t \in (-\eta, \eta)$ (ici $f_t(x) := f(t,x)$) ;

(ii) $\varphi_0 = Id$.

Démonstration. Posons $\psi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \to M, (t,x) \mapsto \pi\big(f(t,x)\big)$ et $\psi^\vee : (-\varepsilon, \varepsilon) \to C^\infty(M,M), t \mapsto \{M \ni x \mapsto \pi\big(f(t,x)\big) \in M\}$. Etant donné que $\psi = \pi \circ f$, l'application ψ est lisse, ce qui veut exactement dire que $\psi^\vee$ est une courbe lisse de $C^\infty(M,M)$ (Voir Appendice, Proposition 3.8). Or, le groupe de Lie $\mathrm{Diff}\,(M)$ étant ouvert dans $C^\infty(M,M)$, (voir [10], Theorem 43.1.), et puisque $\psi^\vee(0) = Id$, on en déduit qu'il existe $\eta > 0$ tel que $\psi^\vee$ restreint à $(-\eta, \eta)$ soit une courbe lisse de $\mathrm{Diff}\,(M)$. Considérons alors le chemin lisse $\varphi : (-\eta, \eta) \to \mathrm{Diff}\,(M), t \mapsto \big(\psi^\vee(t)\big)^{-1}$. Pour $x = \big(\psi^\vee(t)\big)(y) \in M$, on constate que :

$$\pi\Big((f_t \circ \varphi_t)(x)\Big) = \pi\Big(f_t\Big((\psi_t^\vee)^{-1}(\psi_t^\vee(y))\Big)\Big) = \pi\Big(f_t(y)\Big) = \psi_t^\vee(y) = x\,.$$

Donc $\pi \circ (f_t \circ \varphi_t) = Id$ ce qui signifie que $f_t \circ \varphi_t$ est une section de E. ■

Remarquons que comme corollaire de cette proposition, on retrouve le résultat classique suivant (voir par exemple [6], Theorem 1.4, page 37) :

Corollaire 2.2. *L'ensemble $Emb(\Sigma, M)$ est ouvert dans $C^\infty(\Sigma, M)$. En particulier, $Emb(\Sigma, M)$ est naturellement une variété fréchétique lisse modérée.*

Démonstration. Supposons que $\mathrm{Emb}(\Sigma, M)$ ne soit pas ouvert dans la variété $C^\infty(\Sigma, M)$. On peut donc trouver une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $C^\infty(\Sigma, M)\backslash\mathrm{Emb}(\Sigma, M)$ telle que $f_n \to f$ pour un certain $f \in \mathrm{Emb}(\Sigma, M)$. Soit alors $(\mathcal{U}_f, \varphi_f)$ une carte de $C^\infty(\Sigma, M)$ centrée en f et telle que $\varphi_f(\mathcal{U}_f)$ soit convexe. Rappelons que l'on peut construire la carte $(\mathcal{U}_f, \varphi_f)$ en prenons $\varphi_f(\mathcal{U}_f)$ un voisinage de 0 suffisamment petit de l'espace des sections $\Gamma_{C^\infty}(\Sigma,\, f^*TM)$ et

$$\varphi_f^{-1} : \varphi_f(\mathcal{U}_f) \to \mathcal{U}_f \subseteq C^\infty(\Sigma, M)\,,$$

l'application qui est définie par $\varphi_f^{-1}(X)(x) := \exp_{f(x)}(X_x)$ pour $X \in \Gamma_{C^\infty}(\Sigma,\, f^*TM)$ et $x \in \Sigma$. Puisque $f_n \to f$, nous pouvons supposer que $f_n \in \mathcal{U}_f$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et ainsi considérer la suite de sections

$$\big(\varphi_f(f_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$$

de $\varphi_f(\mathcal{U}_f) \subseteq \Gamma_{C^\infty}(\Sigma, f^*TM)$. Or, $\Gamma_{C^\infty}(\Sigma, f^*TM)$ étant un espace de Fréchet, nous pouvons supposer (voir Appendice, Proposition 3.11) qu'il existe une courbe lisse de sections $s : \mathbb{R} \to \Gamma_{C^\infty}(\Sigma, f^*TM)$ telle que :

$$s_0 = s(0) = \varphi_f(f) \quad et \quad s\bigg(\frac{1}{n}\bigg) = \varphi_f(f_n)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si l'on construit s de la même manière que dans le "special curve lemma" de [10], on constate que s est à valeurs dans $\varphi_f(\mathcal{U}_f)$. En effet, $s(\Sigma)$ est le polygone d'arrêtes les $\varphi_f(f_n)$ et l'on a choisit $\varphi_f(\mathcal{U}_f)$ convexe. Notons alors

$$g : \mathbb{R} \times \Sigma \to M,\ (t,x) \mapsto \varphi_f^{-1}(s_t)(x)\,.$$

Par construction on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$g_0 = f \quad \text{et} \quad g_{\frac{1}{n}} = f_n\,.$$

Notons $W := f(\Sigma) = g_0(\Sigma)$. Pour t assez petit, $g_t(\Sigma) \subseteq \tau_W(\Theta_W)$ et nous pouvons dès lors considérer l'application

$$W \ni x \to (\tau_W^{-1} \circ g_t \circ g_0^{-1})(x) \in NW .$$

Cette dernière application vérifie les hypothèses de la Proposition 2.1, il existe donc une courbe φ_t de $\mathrm{Diff}(W)$ telle que :

$$\sigma_t \,:\, x \in W \mapsto (\tau_W^{-1} \circ g_t \circ g_0^{-1} \circ \varphi_t)(x) \in NW$$

soit une section du fibré normal de W. Mais alors, pour n assez grand,

$$f_n = g_{\frac{1}{n}} = \tau_W \circ \sigma_{\frac{1}{n}} \circ \varphi_{\frac{1}{n}}^{-1} \circ g_0$$

est un plongement de Σ dans M ce qui est une contradiction. Ainsi, $\mathrm{Emb}(\Sigma, M)$ est bien un ouvert de $C^\infty(\Sigma, M)$. ■

Corollaire 2.3. *L'application $p : Emb(\Sigma, M) \to Gr_k(M)$ est lisse et pour un chemin lisse f_t de $Emb(\Sigma, M)$, on a la formule :*

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t_0} p(f_t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t_0)\right)^{\perp},$$

où $\big(\frac{\partial f}{\partial t}(t_0)\big)^{\perp}$ est la section de $\Gamma_{C^\infty}(f_{t_0}(\Sigma), Nf_{t_0}(\Sigma))$ qui est définie pour $x \in \Sigma$ par $\left(\dfrac{\partial f}{\partial t}(t_0)\right)^{\perp}_{f_{t_0}(x)} := pr\big(\frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x)\big)$, pr étant la projection orthogonale sur le fibré normal de $f_{t_0}(\Sigma)$.

Démonstration. Prenons f_t un chemin lisse de $\mathrm{Emb}(\Sigma, M)$. Nous devons montrer que $p(f_t)$ est un chemin lisse de $Gr_k(M)$ afin de vérifier la lissité de p au sens de Kriegl-Michor. Fixons $t_0 \in \mathbb{R}$ et notons $W := p(f_{t_0})$. Pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, l'application

$$(t, x) \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \times W \mapsto (\tau_W^{-1} \circ f_t \circ f_{t_0}^{-1})(x) \in NW,$$

satisfait les hypothèses de la Proposition 2.1. Il existe donc un chemin lisse φ_t de difféomorphismes de W tel que

$$x \in W \mapsto (\tau_W^{-1} \circ f_t \circ f_{t_0}^{-1} \circ \varphi_t)(x) \in NW$$

soit une section de $\Gamma_{C^\infty}(W, NW)$ dès que t est suffisamment petit. Mais ceci nous donne justement la possibilité d'exprimer $p(f_t)$ au voisinage de t_0 dans la carte $\big(\varphi_W(\mathcal{U}_W), \varphi_W^{-1}\big)$:

$$\varphi_W^{-1}\big(p(f_t)\big) = \tau_W^{-1} \circ f_t \circ f_{t_0}^{-1} \circ \varphi_t \in \Gamma_{C^\infty}(W, NW).$$

Cette dernière courbe de sections étant lisse, il en résulte que p est lisse.

Pour la formule de la différentielle de p, notons $W := f_{t_0}(\Sigma)$. En identifiant $\mathrm{T}_W Gr_k(M)$ à $\Gamma_{C^\infty}(W, NW)$, on a :

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t_0} p(f_t) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t_0} \varphi_W^{-1}\big(p(f_t)\big) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t_0} \big(\tau_W^{-1} \circ f_t \circ f_{t_0}^{-1} \circ \varphi_t\big),$$

et pour $x \in W$,

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t_0} \big(\tau_W^{-1} \circ f_t \circ f_{t_0}^{-1} \circ \varphi_t\big)(x) = (\tau_W^{-1})_{*_x} \frac{d}{dt}\bigg|_{t_0} \big(f_t \circ f_{t_0}^{-1} \circ \varphi_t\big)(x)$$

$$= (\tau_W^{-1})_{*_x} \Bigg[\underbrace{\frac{\partial f}{\partial t}(t_0, f_{t_0}^{-1}(x))}_{\in \mathrm{T}_x M} + \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t_0, x)}_{\in \mathrm{T}_x W} \Bigg].$$

Par construction de φ_t, il vient :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t_0, f_{t_0}^{-1}(x)) + \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t_0, x) \in N_x W$$

ce qui implique, puisque $\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}(t_0, x) \in \mathrm{T}_x W$, que

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t_0, f_{t_0}^{-1}(x)) + \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t_0, x) = \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t_0)\right)_x^{\perp}.$$

Ainsi,

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t_0} \big(\tau_W^{-1} \circ f_t \circ f_{t_0}^{-1} \circ \varphi_t\big)(x) = (\tau_W^{-1})_{*_x} \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t_0)\right)_x^{\perp}$$

$$= \frac{d}{du}\bigg|_0 \tau_W^{-1}\left[exp_x\left(u\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t_0)\right)_x^{\perp}\right)\right] = \frac{d}{du}\bigg|_0 (\tau_W^{-1} \circ \tau_W)\left(x, u\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t_0)\right)_x^{\perp}\right)$$

$$= \frac{d}{du}\bigg|_0 \left(x, u\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t_0)\right)_x^{\perp}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t_0)\right)_x^{\perp}.$$

Par suite,

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t_0} p(f_t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t_0)\right)^{\perp},$$

ce qui est la formule cherchée. ∎

Remarque 2.4. Au vu de la formule de la différentielle de p, il semblerait que cette dernière application dépende “plus” que de la structure différentiable de $Gr_k(M)$ puisque la métrique utilisée apparait dans la formule de la différentielle de p. En fait, il ne faut pas oublier que pour $W \in Gr_k(M)$, $\mathrm{T}_W Gr_k(M)$ n'est pas égal à l'espace $\Gamma_{C^\infty}(W, NW)$ mais lui est seulement isomorphe via une réalisation nécéssitant la métrique g.

A présent, afin de pouvoir considérer certains fibrés principaux, introduisons, pour $\Sigma \in Gr_k(M)$, les notations suivantes :

(i) $p : \mathrm{Emb}(\Sigma, M) \to Gr_k(M)$, $f \mapsto p(f)$ la projection canonique;

(ii) $p_\Sigma : \mathrm{Emb}(\Sigma, M) \to Gr(\Sigma, M) := p(\mathrm{Emb}(\Sigma, M))$, $f \mapsto p(f)$;

(iii) $\lambda : \mathrm{Emb}(\Sigma, M) \times \mathrm{Diff}^+(\Sigma) \to \mathrm{Emb}(\Sigma, M)$, $(f, \varphi) \mapsto f \circ \varphi$ l'action naturelle à droite de $\mathrm{Diff}^+(\Sigma)$ sur $\mathrm{Emb}(\Sigma, M)$.

Nous allons montrer par une série de lemmes que $\mathrm{Emb}(\Sigma, M)$ est un $\mathrm{Diff}^+(\Sigma)$-fibré principal au-dessus de $Gr(\Sigma, M)$.

Lemme 2.5. *Soient U, V deux ouverts de M d'intersection non nulle et Σ_0, Σ_1, W trois sous-variétés de M telles que :*

$$\Sigma_0 \subseteq U,\ \ \Sigma_1 \subseteq V \quad et \quad W \subseteq U \cap V\,.$$

Soient aussi β un chemin continu de $Emb(\Sigma_0, U)$ et $\tilde{\beta}$ un chemin continu de $Emb(W, V)$ tels que :

$$\beta(0) = j_{\Sigma_0},\ \beta(1)(\Sigma_0) = W,\ \tilde{\beta}(0) = j_W \ \ et \ \ \tilde{\beta}(1)(W) = \Sigma_1$$

où $j_{\Sigma_0} : \Sigma_0 \hookrightarrow M$ et $j_W : W \hookrightarrow M$ sont les inclusions canoniques. Alors, l'application $\gamma : [0,2] \to Emb(\Sigma_0, U \cup V)$ définie par :

$$\gamma(t) = \begin{cases} \beta(t) \ \ pour \ \ t \in [0,1]\,; \\ \tilde{\beta}(t-1) \circ \beta(1) \ \ pour \ \ t \in [1,2], \end{cases}$$

est un chemin continu de $Emb(\Sigma_0, U \cup V)$.

Démonstration. Considérons l'application

$$\vartheta : \mathrm{Emb}(W, V) \to \mathrm{Emb}(\Sigma_0, U \cup V),\ \ \rho \mapsto \rho \circ \beta(1)\,.$$

En utilisant les courbes lisses de $\mathrm{Emb}(W, V)$, il est immédiat que ϑ est une application lisse, en particulier, ϑ est continue. Mais alors :

(i) γ est clairement continue sur $[0,1]$;

(ii) $\gamma(t) = (\vartheta \circ \tilde{\beta})(t-1)$ pour $t \in [1,2]$ et donc γ est continue sur [1,2].

Il en résulte que $\gamma : [0,2] \to \mathrm{Emb}(\Sigma_0, U \cup V)$ est bien un chemin continu de $\mathrm{Emb}(\Sigma_0, U \cup V)$. ∎

Lemme 2.6. *Soient Σ_0, Σ_1 deux éléments de $Gr_k(M)$ et $\alpha : [0,1] \to Gr_k(M)$ un chemin continu tel que $\alpha(0) = \Sigma_0$ et $\alpha(1) = \Sigma_1$. Alors il existe $\beta : [0,1] \to Emb(\Sigma_0, M)$, un chemin continu de $Emb(\Sigma_0, M)$ tel que :*

$$\beta(0) = j_{\Sigma_0}\,,\ \ (p \circ \beta)(0) = \alpha(0) = \Sigma_0 \ \ et \ \ (p \circ \beta)(1) = \alpha(1) = \Sigma_1$$

où $p : Emb(\Sigma_0, M) \to Gr_k(M)$ est la projection canonique et $j_{\Sigma_0} : \Sigma_0 \hookrightarrow M$ l'inclusion canonique.

Démonstration. Puisque α est continu, l'ensemble $\alpha([0,1])$ est compact et peut donc être recouvert par un nombre fini de carte. Pour simplifier, supposons que

$$\alpha([0,1]) \subseteq \varphi_{\Sigma_0}(\mathcal{U}_{\Sigma_0}) \cup \varphi_{\Sigma_1}(\mathcal{U}_{\Sigma_1})\,,$$

les notations étant celles précédemment introduites. Prenons W un élément de $\varphi_{\Sigma_0}(\mathcal{U}_{\Sigma_0}) \cap \varphi_{\Sigma_1}(\mathcal{U}_{\Sigma_1})$. On a :

$$W = \varphi_{\Sigma_0}(s_0) \ \ \text{et} \ \ W = \varphi_{\Sigma_1}(s_1)$$

pour un certain $s_0 \in \mathcal{U}_{\Sigma_0}$ et un certain $s_1 \in \mathcal{U}_{\Sigma_1}$. On peut alors considérer les applications :

$$\beta \,:\, [0,1] \to \mathrm{Emb}(\Sigma_0, \tau_{\Sigma_0}(\Theta_{\Sigma_0})),\ t \mapsto \{x \in \Sigma_0 \mapsto \exp_x(ts_0(x))\}$$

et

$$\tilde{\beta} \,:\, [0,1] \to \mathrm{Emb}(W, \tau_{\Sigma_1}(\Theta_{\Sigma_1})),\ t \mapsto \{x \in W \mapsto \exp_{\tilde{p}(x)}((1-t)s_1(\tilde{p}(x)))\}\,.$$

où $\tilde{p} \,:\, \tau_{\Sigma_1}(\Theta_{\Sigma_1}) \to \Sigma_1,\ \tau_{\Sigma_1}\big((x,v)\big) \mapsto x$ pour $(x,v) \in N\Sigma_1$ est la projection canonique. Ces deux applications, β et $\tilde{\beta}$, sont manifestement continues puisque l'on peut les étendre en des courbes lisses. Il en résulte par le Lemme 2.5 (et après reparamétrage), qu'il existe une courbe continue

$$\gamma \,:\, [0,1] \to \mathrm{Emb}(\Sigma_0, \tau_{\Sigma_0}(\Theta_{\Sigma_0}) \cup \tau_{\Sigma_1}(\Theta_{\Sigma_1})) \subseteq \mathrm{Emb}(\Sigma_0, M)$$

telle que $\gamma(0) = \beta(0) = j_{\Sigma_0}$ et $\gamma(1) = \tilde{\beta}(1) \circ \beta(1)$. D'où :

$$(p \circ \gamma)(0) = p\big(\gamma(0)\big) = p(j_{\Sigma_0}) = \Sigma_0\,.$$

De plus, puisque

$$\gamma(1)(\Sigma_0) = \big(\tilde{\beta}(1) \circ \beta(1)\big)(\Sigma_0) = \tilde{\beta}(1)(W) = \Sigma_1\,,$$

il suffit pour montrer que $p(\gamma(1)) = \Sigma_1$, de vérifier que $[\gamma(1)^*\mu_1] = [\mu_0]$ où $[\mu_i]$ est l'orientation de Σ_i (i=0,1). Mais cela découle de la définition même des cartes $\varphi_{\Sigma_i}(\mathcal{U}_{\Sigma_i})$. En effet, d'après cette définition, l'orientation de W est donnée à la fois par $[(\beta(1)^{-1})^*\mu_0]$ et par $[\tilde{\beta}(1)^*\mu_1]$, et comme $\gamma(1) = \tilde{\beta}(1) \circ \beta(1)$, on en déduit que $p(\gamma(1)) = (\Sigma_1, [\mu_1]) = \Sigma_1$. ■

Corollaire 2.7. *L'ensemble $Gr(\Sigma, M)$ est une réunion de composantes connexes de $Gr_k(M)$. En particulier, $Gr(\Sigma, M)$ est une variété modérée.*

Démonstration. Soient $f \in \mathrm{Emb}(\Sigma, M)$ et $\Sigma_1 \in Gr_k(M)$ un élément appartenant à la même composante connexe dans $Gr_k(M)$ que $p_\Sigma(f) =: \Sigma_0$. Pour montrer le lemme, il suffit de montrer que $\Sigma_1 \in Gr(\Sigma, M)$.

Prenons $\alpha \,:\, [0,1] \to Gr_k(M)$, un chemin continu de $Gr_k(M)$ tel que :

$$\alpha(0) = p_\Sigma(f) = \Sigma_0 \quad \text{et} \quad \alpha(1) = \Sigma_1\,.$$

D'après le Lemme 2.6, il existe un chemin $\beta \,:\, [0,1] \to \mathrm{Emb}(\Sigma_0, M)$ tel que :

$$\beta(0) = j_{\Sigma_0}\,, \quad (p_{\Sigma_0} \circ \beta)(0) = \alpha(0) = \Sigma_0 \ \text{ et } \ (p_{\Sigma_0} \circ \beta)(1) = \alpha(1) = \Sigma_1\,.$$

Si l'on regarde f comme une application à valeurs dans $\Sigma_0 = p_\Sigma(f)$, alors on constate que

$$p_\Sigma(\beta(1) \circ f) = \Sigma_1 \quad \text{avec} \quad \beta(1) \circ f \in \mathrm{Emb}(\Sigma, M)\,.$$

Ainsi, $\Sigma_1 \in Gr(\Sigma, M)$. ■

Lemme 2.8. *L'application $p_\Sigma : Emb(\Sigma, M) \to Gr(\Sigma, M)$ admet des sections locales.*

Démonstration. Soit $W \in Gr(\Sigma, M)$ et soit $f \in \mathrm{Emb}(\Sigma, M)$ tel que $p_\Sigma(f) = W$. On peut constater que l'application $\sigma : \varphi_W(\mathcal{U}_W) \to \mathrm{Emb}(\Sigma, M)$ définie par

$$\sigma(\varphi_W(s))(x) := exp_{f(x)}\, s(f(x))$$

est une section locale de p_Σ. ■

Lemme 2.9. *L'action $\lambda : Emb(\Sigma, M) \times Diff^+(M) \to Emb(\Sigma, M)$ est libre. De plus, pour $W \in Gr(\Sigma, M)$ et $f \in Emb(\Sigma, M)$ telle que $p_\Sigma(f) = W$, on a $p_\Sigma^{-1}(W) = \mathcal{O}_f$ où $\mathcal{O}_f$ est l'orbite de f pour l'action λ.*

Démonstration. La liberté de λ est évidente. Montrons que $p_\Sigma^{-1}(W) = \mathcal{O}_f$. Notons $[\mu]$ l'orientation de Σ. Par la suite, nous noterons f^{-1} l'unique application lisse de W dans Σ vérifiant $f^{-1} \circ f = id_\Sigma$ (et de même pour g). On a :

$$\begin{aligned} g \in p_\Sigma^{-1}(W) \;&\Leftrightarrow\; g(\Sigma) = f(\Sigma) \;\text{ et }\; [(g^{-1})^*\mu] = [(f^{-1})^*\mu] \\ &\Leftrightarrow\; g = f \circ \varphi \;\text{ avec }\; \varphi = f^{-1} \circ g \in \mathrm{Diff}(\Sigma) \\ &\;\; \text{et }\; [(g^{-1})^*\mu] = [(f^{-1})^*\mu] \\ &\Leftrightarrow\; g = f \circ \varphi \;\text{ avec }\; \varphi \in \mathrm{Diff}^+(\Sigma) \\ &\Leftrightarrow\; g = \lambda(f, \varphi) \;\text{ avec }\; \varphi \in \mathrm{Diff}^+(\Sigma)\,. \end{aligned}$$

Ainsi, $p_\Sigma^{-1}(p_\Sigma(f)) = \mathcal{O}_f$. ■

Lemme 2.10. *Pour $W \in Gr(\Sigma, M)$ et $f \in Emb(\Sigma, M)$ telle que $p_\Sigma(f) = \Sigma$, l'application*

$$\Lambda \,:\, p_\Sigma^{-1}(\varphi_W(\mathcal{U}_W)) \longrightarrow Diff^+(\Sigma), \;\; g \mapsto \sigma\Big(p_\Sigma(g)\Big)^{-1} \circ g$$

est lisse modérée (ici σ correspond à la section construite dans le Lemme 2.8).

Démonstration. Remarquons que Λ est bien définie et est l'unique application vérifiant $\lambda\Big(\sigma\big(p_\Sigma(g)\big),\, \Lambda(g)\Big) = g$ pour tout $g \in p_\Sigma^{-1}(\varphi_W(\mathcal{U}_W))$.

Montrons que Λ est lisse modérée. Pour $g \in p_\Sigma^{-1}(\varphi_W(\mathcal{U}_W))$ et $x \in \Sigma$ on a :

$$\Lambda(g)(x) = \Big(\Big(\sigma\big(p_\Sigma(g)\big)\Big)^{-1} \circ g\Big)(x) \;\;\Rightarrow\;\; \sigma\big(p_\Sigma(g)\big)\big(\Lambda(g)(x)\big) = g(x)\,.$$

Notons $s \in \Gamma_{C^\infty}(W, NW)$ l'unique section de $\Gamma_{C^\infty}(W, NW)$ vérifiant $p_\Sigma(g) = \varphi_W(s)$. On a alors :

$$\begin{aligned} \sigma\big(\varphi_W(s)\big)\big(\Lambda(g)(x)\big) = g(x) \;\;&\Rightarrow\;\; \exp_{(f\circ\Lambda(g))(x)}\Big(\big(s \circ f \circ \Lambda(g)\big)(x)\Big) = g(x) \\ &\Rightarrow\;\; \big(s \circ f \circ \Lambda(g)\big)(x) = \tau_W^{-1}\big(g(x)\big) \\ &\Rightarrow\;\; \big(f \circ \Lambda(g)\big)(x) = \big(\pi_{NW} \circ \tau_W^{-1} \circ g\big)(x) \\ &\Rightarrow\;\; \Lambda(g)(x) = \big(f^{-1} \circ \pi_{NW} \circ \tau_W^{-1} \circ g\big)(x)\,. \end{aligned}$$

Ainsi, $\Lambda(g) = f^{-1} \circ \pi_{NW} \circ \tau_W^{-1} \circ g$, et l'on peut remarquer que l'application f étant fixée, f^{-1} est une application lisse indépendante de $g \in p_\Sigma^{-1}(\varphi_W(\mathcal{U}_W))$. On en déduit que Λ est bien une application lisse modérée. ■

De cette succession de lemmes, on en déduit :

Théorème 2.11. *L'application $p_\Sigma : Emb(\Sigma, M) \to Gr(\Sigma, M)$ est un $Diff^+(\Sigma)$-fibré principal modéré pour l'action λ.*

Démonstration. Prenons $W \in Gr(\Sigma,\, M)$ et choisissons $f \in \mathrm{Emb}(\Sigma, M)$ telle que $p_\Sigma(f) = W$. On peut considérer le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} p_\Sigma^{-1}\big(\varphi_W(\mathcal{U}_W)\big) \arrow[rr, "\Psi"] \arrow[dr, "p_\Sigma"'] & & \varphi_W(\mathcal{U}_W) \times \mathrm{Diff}^+(\Sigma) \arrow[dl, "pr_1"] \\ & \varphi_W(\mathcal{U}_W) & \end{tikzcd}$$

où $\Psi(g) := (p_\Sigma(g),\, \Lambda(g))$.
D'après le Lemme 2.10, Ψ est une application lisse modérée. Cette application est de plus $\mathrm{Diff}^+(\Sigma)$-équivariante, d'inverse lisse modérée $\Psi^{-1}\big(\varphi_W(s),\, \varphi\big) = \sigma\big(\varphi_W(s)\big) \circ \varphi$. On construit ainsi des trivialisations de $\mathrm{Emb}(\Sigma,\, M)$ faisant de $\mathrm{Emb}(\Sigma,\, M)$ un $\mathrm{Diff}^+(\Sigma)$-fibré principal au-dessus de $Gr(\Sigma,\, M)$. ∎

3. Homogénéité des composantes connexes de $Gr_k(M)$ sous l'action des difféomorphismes de M

Pour $\Sigma \in Gr_k(M)$, nous savons que la composante connexe $\big(Gr_k(M)\big)_\Sigma$ de $Gr_k(M)$ contenant Σ est connexe et localement connexe par arcs (l'espace modèle étant de Fréchet) et donc, $\big(Gr_k(M)\big)_\Sigma$ est aussi connexe par arcs. On a alors, tout comme en dimension finie :

Proposition 3.1. *La composante connexe $\big(Gr_k(M)\big)_\Sigma$ est connexe par arcs pour des arcs lisses.*

Pour montrer ce résultat, nous avons besoin d'un lemme que l'on peut déduire de [6] (voir exercise 3.b, Section 8.1, page 182 de [6]).

Lemme 3.2. *Si $\beta : [0,1] \to Emb(\Sigma, M)$ est un chemin continu, alors il existe une application lisse $F : [0,1] \times \Sigma \to M$ telle que :*

(i) l'application $F_t : \Sigma \to M,\ x \mapsto F(t,x)$ soit un plongement pour tout $t \in [0,1]$;

(ii) $F_0(\Sigma) = \beta(0)(\Sigma)$ et $F_1(\Sigma) = \beta(1)(\Sigma)$.

Démonstration. (de la Proposition 3.1) Prenons $\alpha : [0,1] \to \big(Gr_k(M)\big)_\Sigma$ un chemin continu de $\big(Gr_k(M)\big)_\Sigma$. Notons $\Sigma_0 := \alpha(0)$ et $\Sigma_1 := \alpha(1)$. D'après le Lemme 2.6, il existe $\beta : [0,1] \to \mathrm{Emb}(\Sigma_0, M)$ un chemin continu de $\mathrm{Emb}(\Sigma_0, M)$ tel que :

$$(p \circ \beta)(0) = \alpha(0) \quad \text{et} \quad (p \circ \beta)(1) = \alpha(1)\,.$$

Mais alors, d'après le Lemme 3.2, nous pouvons trouver $\varepsilon > 0$ et une application lisse $F :]-\varepsilon, 1+\varepsilon[\times \Sigma_0 \to M$ telle que :

(i) l'application $F_t : \Sigma_0 \to M,\ x \mapsto F(t,x)$ soit un plongement pour tout $t \in [0,1]$;

(ii) $F_0(\Sigma_0) = \beta(0)(\Sigma_0)$ et $F_1(\Sigma_0) = \beta(1)(\Sigma_0)$.

Il en résulte que l'application $t \in]-\varepsilon, 1+\varepsilon[\to \mathrm{Emb}(\Sigma_0, M),\ t \mapsto F_t$ est une courbe lisse de $\mathrm{Emb}(\Sigma_0, M)$ pour ε suffisamment petit (car $\mathrm{Emb}(\Sigma_0, M)$ est ouvert dans $C^\infty(\Sigma_0, M)$).

Par suite, $p \circ F_t$ est une courbe lisse de $\big(Gr_k(M)\big)_\Sigma$ vérifiant :

$$p \circ F_0 = F_0(\Sigma_0) = \beta(0)(\Sigma_0) = \alpha(0) = \Sigma_0$$

$$\text{et} \quad p \circ F_1 = F_1(\Sigma_0) = \beta(1)(\Sigma_0) = \alpha(1) = \Sigma_1$$

ce qui montre la proposition. ■

A présent, considérons $\mathrm{Diff}^0(M)$, la composante connexe de $\mathrm{Diff}(M)$ contenant l'élément neutre Id_M ainsi que son action naturelle sur $\big(Gr_k(M)\big)_\Sigma$:

$$\vartheta : \mathrm{Diff}^0(M) \times \big(Gr_k(M)\big)_\Sigma \to \big(Gr_k(M)\big)_\Sigma ,\ (\varphi, W) \to \varphi(W) .$$

On a alors le résultat d'homogénéité suivant :

Théorème 3.3. *L'action de Diff*$^0(M)$ *sur* $\big(Gr_k(M)\big)_\Sigma$ *est transitive.*

Démonstration. Soients Σ_0 et Σ_1 deux éléments de $\big(Gr_k(M)\big)_\Sigma$ et $\alpha : [0,1] \to \big(Gr_k(M)\big)_\Sigma$ une courbe continue joignant Σ_0 et Σ_1 . Tout comme dans la démonstra- tion de la Proposition 3.1, nous pouvons trouver une application lisse $F : [0,1] \times \Sigma_0 \to M$ telle que :

$$F_0(\Sigma_0) = \Sigma_0 \quad \text{et} \quad F_1(\Sigma_0) = \Sigma_1$$

et telle que F_t soit un plongement pour tout $t \in [0,1]$. Mais alors, d'après un résultat classique de topologie différentielle (voir Theorem 1.3, Chapter 8, page 180 de [6]), nous pouvons trouver une application lisse $\widetilde{F} : [0,1] \times M \to M$ vérifiant pour tout $t \in [0,1]$:

(i) $\widetilde{F}_t \in \mathrm{Diff}(M)$;

(ii) $\widetilde{F}_0 = Id$ et $F_t = \widetilde{F}_t|_{\Sigma_0}$.

D'après la caractérisation des courbes lisses de $\mathrm{Diff}(M)$, on en déduit que $\widetilde{F}_t$ est une courbe lisse de $\mathrm{Diff}(M)$ joignant Id_M et $\widetilde{F}_1$ ce qui implique en particulier que $\widetilde{F}_1 \in \mathrm{Diff}^0(M)$. De plus, $\vartheta(\widetilde{F}_1, \Sigma_0) = \widetilde{F}_1(\Sigma_0) = F_1(\Sigma_0) = \Sigma_1$ ce qui prouve le théorème. ■

Remarque 3.4. On pourrait montrer le Théorème 3.3 en utilisant le Théorème de Nash-Moser via le Theorem 2.4.1 de [5].

Remarque 3.5. A partir du Théorème 3.3 , on peut montrer que la composante connexe $\big(Gr_k(M)\big)_\Sigma$ de la Grassmannienne est aussi homogème sous l'action du groupe $\mathrm{SDiff}(M, \mu)$ des difféomorphimes de M qui préservent une forme volume donnée μ (voir [4]) .

Appendice

Dans cet appendice, on donne – sans démonstrations – quelques résultats techniques utiles pour la géométrie en dimension infinie, plus particulièrement pour l'étude des variétés modelées sur des espaces de Fréchet (pour une introduction aux espaces de Fréchet, on pourra consulter [1] ou [8], pour les variétés modelées sur des espaces de Fréchet, [5], [10], etc.).

Définition 3.6. Soit F un espace de Fréchet, I un ouvert de $\mathbb{R}$ et $c : I \to F$ une application. On dit que c est dérivable sur I si pour tout $x \in I$, le quotient $\big(c(x+h) - c(x)\big)/h$ converge lorsque $h \to 0$, on note alors c' sa dérivée. On dit qu'une courbe $c : I \to F$ est lisse si elle admet des dérivées à tous les ordres.

La proposition "folklorique" suivante (voir [14]) relie deux notions de calcul différentiel sur les espaces de Fréchet. L'une utilise la notion de courbes lisses et est développée dans [10], l'autre, plus classique, utilise la différentielle de Gâteaux et est développée, par exemple, dans [5], [13], etc.

Proposition 3.7. *Si $U \subseteq E$ est un ouvert d'un espace de Fréchet E et $f : U \to F$ une application de U dans un autre espace de Fréchet F, alors f est lisse (au sens de [5]) si et seulement si $f \circ c$ est une courbe lisse de F pour toute courbe lisse $c : I \to U$.*

Pour rendre cette dernière proposition utile , nous avons besoin d'une bonne description (que l'on peut trouver dans [10]) des courbes lisses de $\Gamma_{C^\infty}(M, E)$ où M est une variété compacte et $E \to M$ un fibré vectoriel de rang fini (pour une description de la topologie de $\Gamma_{C^\infty}(M, E)$, on pourra consulter [3], Proposition 17.2.2, page 238).

Proposition 3.8. *Si $s : I \to \Gamma_{C^\infty}(M, E)$ est une courbe lisse de $\Gamma_{C^\infty}(M, E)$, alors l'application $s^\wedge : I \times M \to E,\ (t,x) \mapsto s_t(x)$ est une application lisse.*

Réciproquement, si $f : I \times M \to E$ est une application lisse telle que $f(t,x) \in E_x$ pour tout $(t,x) \in I \times M$, alors l'application $f^\vee : I \to \Gamma_{C^\infty}(M, E)$ définie par $f^\vee(t)(x) := f(t,x)$ est une courbe lisse de $\Gamma_{C^\infty}(M, E)$.

De cette proposition, on peut en déduire facilement une caractérisation naturelle des courbes lisses des sous-variétés de $C^\infty(M, N)$ pour laquelle on renvoie le lecteur à [10], Lemma 42.5, page 442.

Définition 3.9. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'un espace de Fréchet F "converge rapidement" vers $x \in F$ si pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $n^k(x_n - x)$ est bornée (bornée au sens des espaces topologiques localement convexes, voir [8] ou [10]).

Lemme 3.10. *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'un espace de Fréchet F qui converge vers $x \in F$, alors on peut trouver une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge rapidement vers x.*

De ce lemme ainsi que du "special curve lemma" de [10], page 16, on en déduit

Proposition 3.11. *Si* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite d'un espace de Fréchet* F *qui converge vers* $x \in F$, *alors (à sous-suite près) on peut trouver une courbe lisse* $c : \mathbb{R} \to F$ *telle que* $c(\frac{1}{n}) = x_n$ *et* $c(0) = x$.

Remerciements. Je tiens à remercier Tilmann Wurzbacher qui m'a encouragé à faire cet article et qui m'a chaleureusement accompagné durant sa rédaction, et ceux, malgré certains évènements heureux.

Je remercie aussi le "referee" pour avoir porté à ma connaissance de nombreuses sources bibliographiques concernant la genèse de la Grassmannienne nonlinéaire.

Références

[1] Bierstedt, K. D., and J. Bonet, *Some aspects of the modern theory of Fréchet spaces*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. **97** (2003), 159–188.

[2] Binz, E., and H. R. Fischer, *The manifold of embeddings of a closed manifold*, with an appendix by P. Michor, in "Differential geometric methods in mathematical physics (Proc. Internat. Conf., Tech. Univ. Clausthal, Clausthal-Zellerfeld, 1978)," Lecture Notes in Phys. **139**, Springer, Berlin, 1981, 310–329.

[3] Dieudonné, J., "Treatise on analysis. Vol. III," Academic Press, New York, 1972.

[4] Haller, S., and C. Vizman, *Non-linear Grassmannians as coadjoint orbits*, Math. Ann. **329(4)** (2004), 771–785.

[5] Hamilton, R. S., *The inverse function theorem of Nash and Moser*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **7** (1982), 65–222.

[6] Hirsch, M. W., "Differential topology," Graduate Texts in Mathematics **33**, Springer-Verlag, New York, 1994.

[7] Ismagilov, R. S, "Representations of infinite-dimensional groups," Translations of Mathematical Monographs **152**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.

[8] Jarchow, H., "Locally convex spaces," B. G. Teubner, Stuttgart, 1981.

[9] Komorowski, J., and W. Szczyrba, *$F - S$ manifolds in the theory of geodesic fields*, in "Global analysis and its applications (Lectures, Internat. Sem. Course, Internat. Centre Theoret. Phys., Trieste, 1972), Vol. III", Internat. Atomic Energy Agency, Vienna, 1974, 177–183.

[10] Kriegl, A., and P. W. Michor, "The convenient setting of global analysis," Mathematical Surveys and Monographs **53**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.

[11] Michor, P. W., *Manifolds of smooth maps, II. The Lie group of diffeomorphisms of a noncompact smooth manifold*, Cahiers Topologie Géom. Différentielle **21(1)** (1980), 63–86.

[12] —, "Manifolds of differentiable mappings," Shiva Mathematics Series **3**, Shiva Publishing Ltd., Nantwich, 1980.

[13] Milnor, J., *Remarks on infinite-dimensional Lie groups*, in : "Relativity, groups and topology, II (Les Houches, 1983)", North-Holland, Amsterdam, 1984, 1007–1057.

[14] Molitor, M., "Grassmanniennes non-linéaires, groupes de difféomorphismes unimodulaires et quelques équations hamiltoniennes en dimension infinie", Thèse de doctorat, Université Paul Verlaine-Metz, France, 2007.

[15] Weinstein, A., *Symplectic manifolds and their Lagrangian submanifolds*, Advances in Math. **6** (1971), 329–346.

M. Molitor
Faculté des sciences de base
Institut de mathématiques B
Ecole Polytechnique Fédérale
de Lausanne
1015 Lausanne
Switzerland
mathieu.molitor@epfl.ch

Received February 19, 2007
and in final form May 14, 2008