Journal of Lie Theory
Volume **19** (2009) 101–106

Corrigendum à "L'indice de Maslov en dimension infinie" [Journal of Lie Theory 18 (2008), 161–180]

Stéphane Merigon

Communicated by B. Ørsted

Résumé. The Lemma 3.2 and the Proposition 3.2 in "L'indice de Maslov en dimension infinie" [Journal of Lie Theory **18** (2008), 161–180] are false. We give a new definition for the Fredholm pairs. The Maslov index can then be constructed in the same way.
Mathematics Subject Classification 2000: 53D12, 17C65, 32M15.
Key Words and Phrases: Maslov index, bounded symmetric domains, Banach-Jordan algebras.

1. Introduction

Lors de la correction de notre thèse, K.-H. Neeb nous a signalé que le lemme 3.2 de cet article est faux. La proposition 3.3 dont la démonstration utilise ce lemme est fausse également. Il n'est donc pas pertinent de définir les paires de Fredholm comme étant les paires dont l'opérateur de Bergman est un opérateur de Fredholm. Par ailleurs, notre définition des paires de Fredholm avait changé, pour ne plus tenir compte que des propriétés nécessaires à la définition de l'indice de transversalité, si bien que la proposition 3.3 n'avait plus qu'un caractère anecdotique. Nous donnons ici la nouvelle définition des paires de Fredholm, nous montrons qu'elle coïncide avec la définition classique dans le cas $E = \mathrm{Sym}(H)$. Nous donnons alors la démonstration du lemme de perturbation.

Nous tenons à remercier K.-H. Neeb de nous avoir signalé notre erreur.

2. Paires de Fredholm

On considère un JB^*-triple E dont l'ensemble des tripotents inversibles Σ n'est pas vide. Soit $(x, e) \in \Sigma^2$. Le couple (x, e) est dit transverse lorsque $Q(x-e)$ est inversible. Le spectre de x relativement à e est l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $Q(x-\lambda e)$ est inversible. C'est le spectre $\mathrm{Sp}(x, E^{(e)})$ de x dans l'algèbre de Jordan $E^{(e)}$.

Soit $C(x, e)$ la sous-algèbre fermée de $E^{(e)}$ engendrée par e, x et $x^* = Q(e)x$.

ISSN 0949–5932 / $2.50

Proposition 2.1. *Soit* $(x, e) \in \Sigma^2$. *Alors*

(i) $C(x, e)$ *est associative et c'est donc une* C^**-algèbre commutative.*

(ii) Le spectre $U_{x,e}$ *de* x *dans* $C(x, e)$ *est contenu dans le cercle unité, et c'est aussi le spectre de* x *dans* $E^{(e)}$.

(iii) La paire (x, e) *est transverse si et seulement si* $1 \notin U_{x,e}$.

Preuve. Dans $E^{(e)}$, $x^* = x^{-1}$. Or on a $[L(x), L(x^{-1})] = 0$ (cf. [7, 19.26]) et donc $C(x, e)$ est fortement associative, en particulier associative. Le système triple $C(x, e)$ est donc lui aussi associatif et l'on a (cf. [7, 20.32]), pour tout $u, v \in C(x, e)$, $|u \circ v| \leq |u|\,|v|$. On écrit alors comme dans [7, 20.33], pour $z \in C(x, e)$,

$$|z|^3 = |\{z, z, z\}| = |z \circ (z^* \circ z)| \leq |z|\,|z^* \circ z| \leq |z|^2\,|z^*| = |z|^3 .$$

Donc $C(x, e)$ est une C^*-algèbre. Comme x est unitaire dans cette C^*-algèbre, son spectre est contenu dans le cercle unité. Or $C(x, e)$ est contenue dans une sous-algèbre fortement associative maximale (et fermée) de $E^{(e)}$, et le spectre de x dans cette sous-algèbre est égal au spectre de x dans $C(x, e)$, puisque celui-ci est égal sa frontière. Mais cette sous-algèbre fortement associative maximale est pleine dans l'algèbre de Jordan $E^{(e)}$ (ie. ses éléments y sont inversible si et seulement si ils sont inversibles dans $E^{(e)}$, cf. [2, 5]), et donc le spectre de x dans $C(x, e)$ est égal au spectre de x dans $E^{(e)}$. La dernière assertion découle immédiatement de la précédente. ■

Puisque $C(x, e)$ est engendrée (comme C^*-algèbre) par x et e, on a l'isomorphisme de Gelf'and :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{x,e} :& C(x, e) \to C(U_{x,e}), \\ & y \mapsto \hat{y}. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que $1 \notin U_{x,e}$ ou bien que 1 est isolé dans $U_{x,e}$. Alors la fonction caractéristique $\chi_{\{1\}}$ de $\{1\}$ est continue sur $U_{x,e}$. On note alors

$$p = p(x, e) = {\mathcal{G}_{x,e}}^{-1}(\chi_{\{1\}})$$

le projecteur associé 1, et

$$A_p(e) = \{p, A(e), p\}.$$

On dit que 1 est de multiplicité finie si $A_p(e)$ est une JB-algèbre de rang finie, i.e.,

$$A_p(e) = A_1 \oplus \cdots \oplus A_q$$

où chaque A_j est une algèbre de Jordan euclidienne simple ou un facteur spin (ie. la JB-algèbre, de rang 2, $H \oplus \mathbb{R}$ où H est un espace de Hilbert), le rang de $A_p(e)$ étant alors par définition

$$\operatorname{rang} A_p(e) = \operatorname{rang}(A_1) + \cdots + \operatorname{rang}(A_q).$$

Définition 2.2. Soit $(x,e) \in \Sigma^2$. On dit que (x,e) est une paire de Fredholm lorsque (x,e) est transverse, ou lorsque 1 est isolé dans $U_{x,e}$, et est de multiplicité finie.

On définit alors l'indice de transversalité de la paire de Fredholm comme le rang de $A_p(e)$,

$$\mu(x,e) = \operatorname{rang} A_p(e).$$

Lorsque 1 est isolé mais que $A_p(e)$ n'est pas de rang fini, on pose $\mu(x,e) = \infty$.

Exemple 2.3. Soit H un espace de Hilbert complexe (séparable) muni d'une involution isométrique τ et considérons le JB^*-triple $E = \operatorname{Sym}(H)$ des opérateurs symétriques sur H. Montrons que notre définition des paires de Fredholm correspond à la définition classique. Notons H_0 la forme réelle de H associée à τ. Soit $(x,e) \in \Sigma^2$. Alors xe^{-1} est unitaire, donc normal. Soit $C^*(xe^{-1})$ la sous-algèbre fermée de $\mathrm{L}(H)$ engendrée par id, xe^{-1}, et $(xe^{-1})^* = ex^{-1}$. Alors la multiplication droite par e est un isomorphisme de $C^*(xe^{-1})$ sur $C(x,e)$ (qui envoie id sur e et xe^{-1} sur x). Supposons que 1 est isolé dans $U_{x,e}$. Notons p le projecteur associé 1 dans $C(x,e)$ et $p' = pe^{-1}$ le projecteur associé 1 dans $C^*(xe^{-1})$. L'opérateur p' est une projection au sens usuel, et l'on a

$$\ker(\mathrm{id} - xe^{-1}) = p'H.$$

L'action du groupe unitaire $U(H)$ sur Σ par automorphismes du système triple E (définie par $z \mapsto vz{}^t\!v$) est transitive (lorsque Σ est vu comme la Lagrangienne de $H_0 \oplus H_0$, cette action correspond à l'action naturelle du groupe unitaire de $H_0 \otimes \mathbb{C}$ dont la transitivité se démontre comme en dimension finie). En particulier, il existe $u \in U(H)$ tel que $e = u{}^t\!u$. Alors $A(e)$ (la partie autoadjointe de E pour l'involution définie par e) est isomorphe à $\operatorname{Sym}(H_0)$:

$$A(e) = A(u \,\mathrm{id}\, {}^t\!u) = uA(\mathrm{id}){}^t\!u \simeq A(\mathrm{id}) \simeq \operatorname{Sym}(H_0).$$

Soit $p'' = u^{-1}p\,{}^t\!u^{-1}$. C'est un projecteur de $\operatorname{Sym}(H_0)$, i.e. une projection de H laissant H_0 stable. De plus

$$A_{p''}(\mathrm{id}) = p'' \operatorname{Sym}(H_0) p'' \simeq \operatorname{Sym}(p''H_0),$$

comme on peut le voir en écrivant la "matrice" d'un opérateur $z \in \operatorname{Sym}(H_0)$ relativement la décomposition $H_0 = p''H_0 \oplus (1-p'')H_0$, et donc

$$A_p(e) \simeq \operatorname{Sym}(p''H_0).$$

Ainsi $A_p(e)$ est de rang fini si et seulement si $p''H_0$ est de dimension finie. De plus

$$\ker(\mathrm{id} - xe^{-1}) = pe^{-1}H = pH = p\,{}^t\!u^{-1}H = up''H,$$

donc

$$\dim\ker(\mathrm{id} - xe^{-1}) = \dim_{\mathbb{C}} p''H = \dim_{\mathbb{R}} p''H_0,$$

et lorsque l'un des deux membres est fini,

$$\dim\ker(e - x) = \operatorname{rang} A_p(e).$$

Montrons que dans ce cas, $x-e$ est un opérateur de Fredholm. Puisque

$$(\mathrm{id}-xe^{-1})^* = \mathrm{id}-ex^{-1} = (x-e)x^{-1} = (xe^{-1}-\mathrm{id})ex^{-1},$$

on a

$$\operatorname{codim}\overline{\operatorname{im}(\mathrm{id}-xe^{-1})} = \dim\ker(\mathrm{id}-xe^{-1}),$$

et il reste montrer que $\mathrm{id}-xe^{-1}$ est d'image fermée. Grce l'isomorphisme de Gelf'and on voit que $1-(xe^{-1}-p')$ est inversible, et l'on a

$$\mathrm{id}-p' = (\mathrm{id}-xe^{-1})(1-(xe^{-1}-p'))^{-1}.$$

Donc

$$\operatorname{im}(\mathrm{id}-xe^{-1}) = \operatorname{im}(\mathrm{id}-p') = \ker p'$$

est bien fermé. Réciproquement, si $x-e$ est un opérateur de Fredholm, c'est aussi le cas de $\mathrm{id}-xe^{-1}$. Comme 0 est dans la frontière du spectre de cet opérateur, il est en fait isolé (on peut en effet montrer que pour un opérateur de Fredholm T sur un espace de Banach X, dont le spectre contient 0 dans sa frontière, on a $X = \ker T^k \oplus \operatorname{im} T^k$ pour un entier $k \geq 1$ à partir duquel la suite des noyaux et images itérées se stabilise, et on en déduit que 0 est isolé). Donc 1 est isolé dans $U_{x,e}$.

Revenons au cas général. Le fait que 1 soit isolé ou non dans $U_{x,e}$ peut se lire directement sur le spectre de $P(x-e) = Q(x-e)Q(e)$.

Proposition 2.4. *Soit $(x,e) \in \Sigma^2$. Alors 1 est isolé dans $U_{x,e}$ si et seulement si 0 est isolé dans le spectre de $P(x-e) = Q(x-e)Q(e)$.*

Preuve. Posons $U = U_{x,e} = \mathrm{Sp}(x, E^{(e)})$. D'après le théorème de J. Martinez Moreno ([4, 3]),

$$\sigma(P(x-e)) \subset (1-U)(1-U).$$

Donc si 1 est isolé dans U, alors 0 est isolé dans $\sigma(P(x-e))$.

Pour établir la réciproque, on montre que

$$\{(1-\lambda)^2 \mid \lambda \in U\} \subset \sigma(P(x-e)).$$

Commenons par monter que

$$\{(1-\lambda)^2 \mid \lambda \in U\} \subset \partial_{ext}(1-U)(1-U),$$

où $\partial_{ext}K$ est la frontière de la composante connexe non bornée du complémentaire du compact K. Tout élément $1-\lambda \in 1-\mathbb{U}$ s'écrit de manière unique $2\cos\frac{\Theta}{2}e^{i\frac{\Theta}{2}}$ avec $-\pi < \Theta \leq \pi$, et alors

$$(1-\lambda)^2 = 4\cos^2\frac{\Theta}{2}e^{i\Theta}.$$

Soient $2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $2\cos(\Theta-\frac{\theta}{2})e^{i(\Theta-\frac{\theta}{2})}$ dans $1-\mathbb{U}$, où $\mathbb{U}$ est le cercle unité : leur produit vaut

$$4\cos\frac{\theta}{2}\cos(\Theta-\frac{\theta}{2})e^{i\Theta} = 2\big(\cos\Theta + \cos(\Theta-\theta)\big)e^{i\Theta}.$$

Or la fonction $\theta \mapsto \cos\Theta + \cos(\Theta - \theta)$ est maximale pour $\Theta = \theta$. La demi-droite $]4\cos^2\frac{\Theta}{2}, +\infty[e^{i\Theta}$ est donc entièrement contenue dans le complémentaire de $(1-U)(1-U)$, et cela implique notre assertion. Considérons

$$\mathcal{B} = \{T \in \mathrm{L}(E) \mid TC(x,e) \subset C(x,e)\}.$$

C'est une sous-algèbre fermée de $\mathrm{L}(E)$ qui contient $P(x-e)$. Le spectre de $P(x-e)$ dans $\mathcal{B}$ est constitué de $\sigma(P(x-e))$ et, éventuellement, de certains de ses trous (ie. les composantes connexes bornées de son complémentaire). De plus, en considérant le morphisme

$$\mathcal{B} \to \mathrm{L}(C(x,e)),\ T \mapsto T_{|C(x,e)},$$

on a, puisque $\sigma(P(x-e)_{|C(x,e)}) = \{(1-\lambda)^2 \mid \lambda \in U\}$, l'inclusion

$$\{(1-\lambda)^2 \mid \lambda \in U\} \subset \sigma(P(x-e), \mathcal{B}).$$

Il résulte alors de

$$\{(1-\lambda)^2 \mid \lambda \in U\} \subset \partial_{ext}(1-U)(1-U)$$

que

$$\{(1-\lambda)^2 \mid \lambda \in U\} \subset \partial\sigma(P(x-e), \mathcal{B}).$$

Comme $\partial\sigma(P(x-e), \mathcal{B}) \subset \partial\sigma(P(x-e))$, il vient

$$\{(1-\lambda)^2 \mid \lambda \in U\} \subset \partial\sigma(P(x-e)).$$

Et donc si $1 \in U$ n'est pas isolé, alors $0 \in \sigma(P(x-e))$ n'est pas isolé. ■

Soit $e^{i\theta} \in \mathbb{U}$. On a $U_{x,e^{i\theta}e} = e^{-i\theta}U_{x,e}$, et donc si $e^{i\theta}$ est isolé dans $U_{x,e}$, alors 1 est isolé dans $U_{x,e^{i\theta}e}$, et on peut définir $p(x, e^{i\theta}e)$ et $\mu(x, e^{i\theta}e)$.

Pour $0 < \varepsilon < \pi$ on note

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \{e^{i\theta} \mid 0 < |\theta| \leq \varepsilon\}.$$

Lemme 2.5 (Perturbation de l'indice de transversalité). *Soit (x,e) une paire de Fredholm. Il existe $0 < \varepsilon < \pi$ tel que 1 est la seule valeur spectrale de x dans $\mathcal{A}_\varepsilon$. Il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de x tel que pour tout tripotent inversible $y \in \mathcal{V}$, le spectre de y dans $\mathcal{A}_\varepsilon$ est fini et ne contient pas $e^{\pm i\varepsilon}$, et*

$$\mu(x,e) = \sum_{|\theta| \leq \varepsilon} \mu(y, e^{i\theta}e).$$

Preuve. Puisque 1 est isolé (ou n'est pas) dans $U_{x,e}$, il existe $0 < \varepsilon < \pi$ tel que $U_{x,e} \cap \mathcal{A}_\varepsilon = \emptyset$. Dans une algèbre de Jordan Banach, l'ensemble des éléments inversibles est ouvert, donc il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de x tel que

$$\forall y \in \mathcal{V} \quad y - e^{\pm i\varepsilon}e \text{ est inversible.}$$

Alors si y est une unité dans $\mathcal{V}$, $\sigma_\varepsilon = \mathcal{A}_\varepsilon \cap U_{y,e}$ est un sous-ensemble spectral et on peut donc définir $q(y, e, \sigma_\varepsilon) = \mathcal{G}_{y,e}^{-1}(\chi_{\sigma_\varepsilon})$. Alors

$$p(x,e) = \int_{|\lambda - 1| = \varepsilon} \frac{1}{2i\pi}(\lambda e - x)^{-1} d\lambda,$$

et

$$q(y, e, \sigma_\varepsilon) = \int_{|\lambda-1|=\varepsilon} \frac{1}{2i\pi}(\lambda e - y)^{-1} d\lambda,$$

ce qui montre, l'inversion étant continue, que si y est suffisamment proche de x, alors $q(y, e, \sigma_\varepsilon)$ l'est suffisamment de $p(x, e)$. Or si p est un idempotent d'une JB-algèbre A, tout idempotent q dans un voisinage de p peut s'écrire

$$q = \exp k_v(p)$$

où $v \in A_{\frac{1}{2}}(p)$ et $\exp k_v$ est un automorphisme de A (cf. [1]). Quitte à restreindre $\mathcal{V}$, on a donc, en faisant $p = p(x, e)$ et $q = q(y, e, \sigma_\varepsilon)$: pour tout y dans $\mathcal{V}$, $A_q(e)$ est isomorphe à $A_p(e)$. En particulier, si $A_p(e)$ est de rang fini alors $A_q(e)$ aussi et les rangs sont égaux. De plus, dans ce cas, d'après [6, Lemme 4.10 2], l'ensemble σ_ε est le spectre de $P(q)y$ relativement à q dans $P(q)E$ et donc est fini. Supposons $\sigma_\varepsilon = \{e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_l}\}$ et soit $q_j = \mathcal{G}_{y,e}^{-1}(e^{i\theta_j})$, alors en faisant le calcul dans $C(U_{y,e})$, on voit que les q_j sont des idempotents deux deux orthogonaux tels que

$$q = q_1 + \cdots + q_l,$$

et donc $\mathrm{rang}(q) = \mathrm{rang}(q_1) + \cdots + \mathrm{rang}(q_l)$. ■

Références

[1] Chu, C.-H., and J. M. Isidro, *Manifolds of tripotents in JB^*-triples*, Math. Zeitschrift **233** (2000), 741–754.

[2] Hessenberger, G., *On operator-commutative subalgebras of Jordan algebras*, Jordan Theory Preprint, Archives, 1996.

[3] Kaup, W., *A Riemann mapping theorem for bounded symmetric domains in complex Banach spaces*, Math. Zeitschrift **183** (1983), 503–529.

[4] Martinez-Moreno, J., *JV-algebras*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **87** (80), 47–50.

[5] Martinez-Moreno, J., "Sobre algebras de Jordan normadas," Tesis doctorales de la Universidad de Granada, 1977.

[6] Merigon, S., *L'indice de Maslov en dimension infinie*, Journal of Lie theory, **18** (2008), 161–180.

[7] Upmeier, H., "Symmetric Banach manifolds and Jordan C^*-algebras," North-Holland Mathematics Studies, 1985.

Stéphane Merigon
Fachbereich Mathematik, AG AGF
Technische Universität Darmstadt
Schloßgartenstrasse 7
64289 Darmstadt
merigon@mathematik.tu-darmstadt.de

Received March 20, 2009