Journal of Lie Theory
Volume **19** (2009) 797–840

Comparaison des paramètres de Langlands et des exposants à l'intérieur d'un paquet d'Arthur

Colette Mœglin

Communicated by J. Faraut

Abstract. In this paper, one proves an idea expressed by Clozel: inside an Arthur's packet, one has the representations in the Langlands' packet inside the Arthur's packet and more tempered representations than these representations.
Mathematics Subject Classification 2000: Primary 22E50; Secondary 22E35.
Key Words and Phrases: Paquets d'Arthur, paramètres de Langlands.

Dans cet article F est un corps local non archimédien et W_F est son groupe de Weil.

Dans [9] (dernières lignes après 2.4) qui est basé sur [8], Clozel énonce la philosophie des paquets d'Arthur à savoir qu'un paquet d'Arthur doit être composé de représentations dans le paquet de Langlands naturellement associé au paramètre du paquet d'Arthur et de représentations "plus tempérées"; c'est aussi ce qui est expliqué dans le cas des places archimédiennes par Adams, Barbasch et Vogan mais nous nous limitons ici aux places finies et nos méthodes ne s'étendent pas aux places archimédiennes. On peut donner plusieurs sens à une telle assertion. Clozel en donne un qui ne s'applique qu'à certaines représentations mais qui est particulièrement simple à expliquer: on rappelle que les paquets d'Arthur aux places p-adiques sont associés à des morphismes de $W_F \times SL(2,\mathbb{C}) \times SL(2,\mathbb{C})$ dans le L-groupe ayant de bonnes propriétés. On ne considère que des groupes, G, pour lesquels on peut voir de tels morphismes comme des représentations de $W_F \times SL(2,\mathbb{C}) \times SL(2,\mathbb{C})$ à valeurs dans un groupe $GL(m^*_G,\mathbb{C})$ (ce qui définit m^*_G) se factorisant par un sous-groupe de similitudes orthogonales, symplectiques ou unitaires; cela revient à dire que G est un groupe classique tel que les représentations automorphes irréductibles de carré intégrable de sa forme intérieure quasidéployée sont accessibles par la théorie de l'endoscopie tordue à la Arthur; on reprend le yoga expliqué par Arthur auquel on n'ajoute rien (cf. par exemple [4], [5]). Tous les groupes G considérés sont en particulier tels que les sous-groupes paraboliques ont des Levi isomorphes à un produit de groupes linéaires par un groupe de même type que G et ceci est aussi vrai pour le groupe dual. Pour éviter une multiplication de notations, le plus simple est de considérer que G est un groupe classique usuel.

ISSN 0949–5932 / $2.50

La propriété de base ([1]) des paquets de représentations associées à un tel morphisme ψ est que ce paquet contient toutes les représentations du paquet de Langlands qu'Arthur a naturellement associé à ψ en composant, l'inclusion de $W_F \times SL(2,\mathbb{C})$ dans $W_F \times SL(2,\mathbb{C}) \times SL(2,\mathbb{C})$ avec ψ où la première inclusion est

$$(w,g) \mapsto \left(w, g, \begin{pmatrix} |w|^{1/2} & 0 \\ 0 & |w|^{-1/2} \end{pmatrix}\right).$$

Le fait que le paquet de Langlands est effectivement inclus dans le paquet d'Arthur est certainement démontré par Arthur et se trouve aussi dans [17] section **6**.

Dans tout l'article on note $\Pi(\psi)$ le paquet de représentations associées à ψ (on en rappelle la définition et la construction en 3 ci-dessous) et on note $\Pi(\psi_L)$ le paquet de Langlands à l'intérieur du paquet d'Arthur. .

La remarque de Clozel la plus simple à exprimer est que si $\pi \in \Pi(\psi)$ et s'il existe un autre morphisme ψ' tel que $\pi \in \Pi(\psi'_L)$, alors l'orbite unipotente de $GL(m^*_G,\mathbb{C})$ définie par la restriction de ψ à la deuxième copie de $SL(2,\mathbb{C})$ contient dans sa fermeture l'orbite unipotente définie par la restriction de ψ' à la deuxième copie de $SL(2,\mathbb{C})$. Nous démontrons cette remarque en **2.3** ci-dessous. Bien sûr ici, il est important que π soit dans le paquet de Langlands associé à ψ'. Et ce résultat ne s'applique donc qu'à peu d'éléments de $\Pi(\psi)$ puisqu'en général si $\pi \in \Pi(\psi) - \Pi(\psi_L)$, il n'existe pas de morphisme ψ' tel que $\pi \in \Pi(\psi'_L)$.

On donne donc un sens à la remarque de Clozel qui s'applique à toute représentation dans $\Pi(\psi)$. Puisque grâce aux résultats d'Arthur, on a maintenant, pour les groupes auxquels les résultats d'Arthur s'appliquent, la classification de Langlands des séries discrètes (cf [15] et [17]), pour toute représentation irréductible π, on peut définir à l'aide du groupe dual (au moins théoriquement) les paramètres de Langlands de π et on peut donc associer à π un morphisme de $W_F \times SL(2,\mathbb{C})$ dans le L-groupe de G; on voit encore ce morphisme comme une représentation, ϕ_π de $W_F \times SL(2,\mathbb{C})$. On associe alors à π une orbite unipotente en restreignant ϕ_π à $SL(2,\mathbb{C})$; on note O^L_π cette orbite. On suppose maintenant que $\pi \in \Pi(\psi)$ (avec ψ comme ci-dessus). On montre alors (cf. **6.3**) que O^L_π contient dans sa fermeture l'orbite unipotente de $GL(m^*_G,\mathbb{C})$, définie par la restriction de ψ à la première copie de $SL(2,\mathbb{C})$; on vérifie aisément que si $\pi \in \Pi(\psi_L)$, les 2 orbites coïncident. Ce résultat répond à la même philosophie que le précédent mais diffère par le fait qu'il fait intervenir la première copie de $SL(2,\mathbb{C})$ et non la deuxième. Il est donc de nature purement locale. Comme application immédiate de ce résultat (suggérée par [10]) on obtient que si ψ est un morphisme déterminant un paquet de représentations, ce paquet de représentations contient une représentation non ramifiée seulement si la restriction de ψ à la première copie de $SL(2,\mathbb{C})$ est triviale. De plus, facilement, on vérifie que la restriction de ψ à W_F est alors non ramifiée et que quand ces deux conditions sont satisfaites, le paquet contient une unique représentation non ramifiée (cf. **6.4**); pour les groupes orthogonaux pairs il faut bien considérer tout le groupe orthogonal.

Cette relation n'est donc sans doute pas celle que Clozel avait en vue. Ce qui est plus intéressant d'un point de vue global, est de comparer les exposants des représentations, car les exposants locaux donnent quelques informations sur les exposants globaux. La propriété ici est une majoration des exposants locaux à l'aide de l'orbite unipotente associée à la restriction de ψ à la deuxième copie de $SL(2,\mathbb{C})$ pour tout $\pi \in \Pi(\psi)$. Plus précisément, soit π une représentation irréductible; grâce au théorème du quotient de Langlands, et au choix particulier des groupes que l'on a fait ici, il existe une inclusion

$$\pi \hookrightarrow \left(\times_{(\rho,a,x)\in\mathcal{L}_\pi} St(\rho,a)|\cdot|^{-x}\right) \times \pi_{temp},$$

où $\mathcal{L}_\pi$ est un ensemble de triplets formé chacun d'une représentation cuspidale unitaire, ρ, d'un entier a et d'un réel strictement positif x et où π_{temp} est une représentation tempérée irréductible d'un groupe de même type que G mais de rang en général plus petit (cf. **6.1**); la notation $|\cdot|$ est le caractère non ramifié, valeur absolue de F à la puissance x composé avec le déterminant du groupe GL de la situation. L'ensemble $\{x; (\rho,a,x) \in \mathcal{L}_\pi\}$ vu comme ensemble avec multiplicité de réels strictement positifs est bien défini et on l'appelle ensemble des exposants de π; on le note $Exp(\pi)$. L'ensemble $\mathcal{L}_\pi$ est partiellement ordonné, les x qui y interviennent décroissent au sens large mais on peut échanger des triplets ayant le même x; ainsi $Exp(\pi)$ est lui un ensemble avec multiplicité ordonné de nombres réels. Il y a un défaut à cette définition, c'est qu'elle ne tient pas compte de la série discrète qui porte l'exposant, donc ci-dessus dans le triplet (ρ,a,x), on peut tenir compte du ρ (cf. ci-dessous) mais on ne tient pas compte du a. Si π est dans le paquet de Langlands associé à ψ, on connaît parfaitement $Exp(\pi)$: pour l'obtenir, il faut décomposer ψ en sous-représentations irréductibles; une représentation irréductible de $W_F \times SL(2,\mathbb{C}) \times SL(2,\mathbb{C})$ est la donnée d'un triplet (ρ,a,b) où ρ est une représentation irréductible de W_F et a,b sont des entiers qui déterminent chacun une représentation irréductible de $SL(2,\mathbb{C})$. Pour les paquets d'Arthur, on ne considère que le cas où les représentations ρ intervenant sont unitaires (pour palier à l'absence de conjecture de Ramanujan il faudrait accepter des torsions par des caractères de la forme $|\cdot|^x$ avec $x \in]-1/2, 1/2[$; c'est une variante facile que l'on ne traite pas ici). On note $Jord(\psi)$ l'ensemble avec multiplicité des sous-représentations irréductibles de ψ. On appelle $Exp(\psi)$ la collection de demi-entiers, $\bigcup_{(\rho,a,b)\in Jord(\psi)} (b-1)/2, \cdots, \delta_b$, où pour tout entier b, δ_b vaut $1/2$ si b est pair et 1 si b est impair. On vérifie aisément (cf. 1) que $Exp(\psi) = Exp(\pi)$ si $\pi \in \Pi(\psi_L)$. On suppose simplement que $\pi \in \Pi(\psi)$ et on montre en **7.2** que $Exp(\pi) \leq Exp(\psi)$ au sens des inclusions d'orbites unipotentes, c'est-à-dire que pour tout entier t la somme des t plus grands éléments de $Exp(\pi)$ est inférieure ou égal à la somme des t plus grands éléments de $Exp(\psi)$, on ajoute des 0 si nécessaire. L'assertion est moins jolie que l'assertion sur les orbites unipotentes et elle ne la généralise pas complètement par la remarque déjà faite que dans cette assertion on oublie complètement la taille de la représentation de Steinberg qui "porte" l'exposant.

L'article démontre successivement les 3 propriétés expliquées dans cette introduction; la première propriété est d'une nature différente des autres. On a essayé d'expliquer cela dans l'article: elle est conséquence d'une propriété des modules de Jacquet des représentations des groupes linéaires associées aux représentations de $W_F \times SL(2,\mathbb{C}) \times SL(2,\mathbb{C})$ considérées; c'est la propriété de **2.2**. Les représentations dans les paquets de Langlands à l'intérieur d'un paquet d'Arthur sont extrêmement particulières (cf. par exemple 1 ci-dessous): elles héritent du fait que les composantes locales des formes automorphes de carré intégrable pour les groupes linéaires sont particulièrement simples, ces composantes locales sont des induites nécessairement irréductibles de modules de Speh. Pour les groupes considérés ici, la situation est un peu plus compliquée, ces représentations ne sont pas des induites irréductibles mais peu s'en faut quand même. En particulier leur module de Jacquet ont des propriétés assez remarquables et c'est cela que l'on utilise. Le fait qu'une non nullité de modules de Jacquet pour une représentation dans un paquet d'Arthur entraîne aussi une non nullité de module de Jacquet pour la représentation du groupe linéaire associé est immédiate si tous les signes dans le paquet d'Arthur sont les mêmes. Quand ceci n'est pas vrai, la situation est plus compliquée et la preuve nécessite alors d'entrer dans la structure fine des constructions pour montrer cela (cf. **5.1** ci-dessous). Quand on a cette non nullité des modules de Jacquet, la remarque de Clozel est une propriété combinatoire simple qui se résume à: soit S et S' deux segments décroissants de même début et tels que S' est inclus dans S alors le milieu de S est inférieur ou égal au milieu de S' (cf. **2.3**).

Les deux autres propriétés ont une démonstration analogue; les assertions sont vraies si le paquet ne contient que des représentations tempérées et la preuve consiste donc à se ramener à ce cas. Pour cela il faut utiliser des descriptions par récurrence des éléments de $\Pi(\psi)$ qui sont données en **5.3** et **5.4** et la démonstration est purement technique.

Dans l'article on démontre une version un peu plus précise des propriétés annoncées ici; on fixe la représentation irréductible de W_F que l'on identifie via la correspondance de Langlands à une représentation cuspidale d'un groupe linéaire convenable et toutes les propriétés énoncées s'exprimant, côté ψ, dans la composante isotypique pour l'action de W_F et pour les exposants, on démontre la propriété en fixant le support cuspidal des représentations de Steinberg tordues comme étant une collection de représentation de la forme $\rho|\cdot|^y$ pour $y \in \mathbb{R}$ avec une représentation cuspidale ρ fixée d'un groupe linéaire convenable. Cela ne coûte pas plus cher et simplifie même les notations.

Conventions importantes: on suppose que la classification de Langlands des séries discrètes est connues pour les groupes considérés, ou plus exactement notre article ne s'applique qu'aux groupes classiques (ou même de similitudes) pour lesquels cette classification est connue en les termes de [4]. Pour le moment le bilan est plutôt maigre.

Pour la clarté des notations, on a préféré oublier dans le texte le fait que dans le cas des groupes unitaires, les groupes linéaires qui interviennent ne sont pas sur le corps de base F mais sur l'extension quadratique de F qui sert à définir la forme linéaire et au lieu de considérer la contragrédiente des représentations de ces groupes linéaires il faut considérer le dual hermitien.

1. Description des représentations de Langlands à l'intérieur d'un paquet d'Arthur

1.1. Description. On fixe ψ comme dans l'introduction, d'où $Jord(\psi)$ défini aussi dans l'introduction et qui donne la décomposition de ψ en représentations irréductibles. Dans l'introduction on a défini le morphisme de Langlands associé à ψ par la méthode d'Arthur; on le note ϕ_ψ et sa décomposition en sous-représentations irréductibles est explictement donnée en fonction de celle de ψ par:

$$\phi_\psi = \bigoplus_{(\rho,a,b)\in Jord(\psi)} \bigoplus\nolimits_{c\in[-(b-1)/2,(b-1)/2]} \rho|\cdot|^c \otimes rep_a$$

comme représentation de $W_F \otimes SL(2,\mathbb{C})$, où pout $a\in\mathbb{N}$, rep_a est la représentation irréductible de dimension a de $SL(2,\mathbb{C})$. Les représentations dans le paquet de Langlands associés à ϕ_ψ sont en bijection avec les représentations tempérées dans le paquet associé à

$$\psi_{temp} := \bigoplus_{(\rho,a,b)\in Jord(\psi);b\equiv 1[2]} \rho\otimes rep_a.$$

A tout $\pi_{temp}\in\Pi(\psi_{temp})$, on associe la représentation qui est le sous-quotient de Langlands de l'induite:

$$\left(\times_{(\rho,a,b)\in Jord(\psi);b>1} \times_{c\in[\delta_b,(b-1)/2]} St(\rho,a)|\cdot|^{-c}\right)\times\pi_{temp}, \tag{1}$$

où $\delta_b=1/2$ si b est pair et 1 si b est impair et où l'intervalle est formé soit de demi-entiers non entiers si b est pair soit d'entiers si b est impair. Ceci veut dire que l'on conjugue les premiers termes de l'induite ci-dessus pour que les exposants soient dans la chambre de Weyl négative et que l'on prend l'unique sous-module irréductible de l'induite ainsi obtenue.

On peut construire ce sous-module irréductible de façon beaucoup plus agréable avec la définition suivante: soient ρ comme ci-dessus, a un entier et $[x,y]$ un segment croissant, on note $J(St(\rho,a),x,y)$ l'unique sous-module irréductible pour le GL convenable inclus dans l'induite

$$\times_{c\in[x,y]} St(\rho,a)|\cdot|^c.$$

On a montré en [21] 1.6.3 que pour $\rho,a,x,y,\rho',a',x',y'$, l'induite pour le GL convenable $J(St(\rho,a),x,y)\times J(St(\rho',a'),x',y')$ est irréductible par exemple si $|y-y'|\le 1/2$.

Proposition. *Les éléments de $\Pi(\psi_L)$ sont en bijection avec les éléments de $\Pi(\psi_{temp})$ l'application $\pi\mapsto\pi_{temp}$ est caractérisée par le fait que*

$$\pi\hookrightarrow\left(\times_{(\rho,a,b)\in Jord(\psi);b>1} J(St(\rho,a),-(b-1)/2,-\delta_b)\right)\times\pi_{temp}. \tag{2}$$

De plus dans (2) on peut bouger les premiers facteurs comme on veut.

C'est une conséquence facile (montrée en [19] 3.5.1) de la propriété d'irréductibilité démontrée en [21] et rappelée avant l'énoncé. On ne refait pas la démonstration ici car les idées sont celles que l'on va utiliser (et écrire) dans **1.3** ci-dessous.

Remarque. *Cette forme très particulière des paramètres de Langlands des représentations dans un paquet du type $\Pi(\psi_L)$ prouve que pour π général, il n'existe pas ψ tel que $\pi \in \Pi(\psi_L)$. On donnera ci-dessous la définition des éléments de $\Pi(\psi)$ mais pour un élément de $\Pi(\psi)$ il n'existe pas en général de morphisme ψ' tel que cet élément soit aussi dans $\Pi(\psi'_L)$ sauf évidemment pour les éléments de $\Pi(\psi_L)$.*

1.2. Notations concernant les modules de Jacquet et les représentations associées à des segments. Soit π une représentation de longueur finie de G et soit ρ une représentation cuspidale irréductible (qui sera toujours unitaire ici) d'un groupe linéaire $GL(d_\rho, F)$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit $Jac_x\pi$; pour cela, il faut que G soit de rang déployé supérieur ou égal à d_ρ (sinon on pose $Jac_x\pi = \emptyset$) et cela suppose aussi que l'on a fixé un sous-groupe parabolique minimal, une fois pour toutes, de façon à avoir la notion de sous-groupe parabolique standard; on fait un tel choix dans tout l'article mais on le fait de façon compatible pour tous les groupes intervenant; par exemple quand il est fait pour G il est fait pour le groupe G' qui arrive immédiatement dans la phrase suivante; pour être plus correct, on fixe un "très gros" groupe H de même type que G mais de rang bien plus grand; on fixe un parabolique minimal standard pour H et on considère chaque groupe de même type que G qui intervient dans cet article comme sous-groupe de H, en considérant $GL(d_{H,G}) \times G$ comme un sous-groupe de Levi standard dans le parabolique standard convenable pour H, où $d_{H,G}$ est la différence des rangs entre H et G.

On considère alors le sous-groupe parabolique standard de Levi isomorphe à $GL(d_\rho, F) \times G'$, où G' est un groupe de même type que G mais de rang d_ρ de moins et $Jac_x\pi$ est par définition telle que dans le groupe de Grothendieck de $GL(d_\rho, F) \times G'$, le module de Jacquet de π pour le radical unipotent du parabolique décrit est de la forme

$$\rho|\cdot|^x \times Jac_x\pi \oplus (\bigoplus_\sigma \sigma \otimes \pi_\sigma),$$

où σ parcourt l'ensemble des représentations irréductibles de $GL(d_\rho, F)$ non isomorphes à $\rho|\cdot|^x$ et où π_σ est un élément convenable du groupe de Grothendieck de G'. Cela définit uniquement $Jac_x\pi$ comme élément du groupe de Grothendieck de G' puisque le groupe de Grothendieck des représentations de $GL(d_\rho, F) \times G'$ est un espace vectoriel ayant pour base les représentations irréductibles de ce groupe.

On a besoin d'une notation analogue pour les représentations des groupes linéaires eux-mêmes. Soit π^{GL} une représentation d'un groupe linéaire $GL(m, F)$; ici on définit $Jac^g_x\pi^{GL}$, nul si $m < d_\rho$ et sinon de telle sorte que le module de Jacquet de π^{GL} pour le sous-groupe parabolique standard usuel de $GL(m, F)$ de Levi $GL(d_\rho) \times GL(m - d_\rho, F)$ soit dans le groupe de Grothendieck convenable, de la forme

$$\rho|\cdot|^x \times Jac_x^g(\pi^{GL}) \oplus (\bigoplus_{\sigma} \sigma \otimes \pi'_\sigma),$$

où σ parcourt l'ensemble des représentations irréductibles de $GL(d_\rho, F)$ qui ne sont pas isomorphes à $\rho|\cdot|^x$.

On définit $Jac^d_{-x}\pi^{GL}$ de façon symétrique et précisément: $Jac^d_{-x}\pi^{GL}$ est nul si $m < d_\rho$ et sinon est l'unique représentation éventuellement 0 tel que le module de Jacquet de π^{GL} pour le sous-groupe parabolique standard usuel de $GL(m, F)$ de Levi $GL(m-d_\rho, F)\times GL(d_\rho, F)$ soit de la forme $Jac^d_{-x}\pi^{GL}\otimes\rho^*|\cdot|^{-x}\oplus(\bigoplus_\sigma \pi'_\sigma\otimes\sigma)$ où σ parcourt l'ensemble des représentations irréductiblesst un élément convenable du groupe de Grothendieck de $GL(m - d_\rho, F)$.

On pose alors

$$Jac^\theta_x\pi^{GL} = Jac^d_{-x} \circ Jac^g_x\pi^{GL}$$

ce qui vaut 0 si $m < 2d_\rho$ et vaut aussi $Jac^g_x \circ Jac^d_{-x}\pi^{GL}$ et est l'unique élément du groupe de Grothendieck de $GL(m - 2d_\rho, F)$ tel que le module de Jacquet de π^{GL} relativement au parabolique standard de Levi $GL(d_\rho, F)\times GL(m-2d_\rho, F)\times GL(d_\rho, F)$ soit de la forme

$$\rho|\cdot|^x \otimes Jac^\theta_x\pi^{GL} \otimes \rho^*|\cdot|^{-x} \oplus (\bigoplus_{(\sigma,\sigma')} \sigma\otimes\pi_{\sigma,\sigma'}\otimes\sigma'),$$

où (σ, σ') parcourt l'ensemble des couples de représentations irréductibles de $GL(d_\rho, F)$ où soit $\sigma \not\simeq \rho|\cdot|^x$ soit $\sigma' \not\simeq \rho^*|\cdot|^{-x}$.

Ces applications peuvent s'itérer; en particulier on définit $Jac_{x,\cdots,y} := Jac_y \circ \cdots Jac_x$. La propriété clé qui vient de la réciprocité de Frobenius est que

$$Jac_x\pi \neq 0 \Rightarrow \exists\sigma,\ \pi \hookrightarrow \rho|\cdot|^x \times \sigma.$$

De plus $Jac_x \circ Jac_y = Jac_y \circ Jac_x$ si $|x - y| > 1$.

On fixe toujours ρ et on fixe aussi un segment $[x, y]$, c'est-à-dire que $x, y \in \mathbb{R}$ et $x - y \in \mathbb{Z}$ (ici dans l'article, le segment sera formé de demi-entiers et sera décroissant); on note $\langle x, \cdots, y\rangle_\rho$ l'unique sous-représentation irréductible du groupe linéaire $GL(d_\rho(|x - y| + 1), F)$ incluse dans l'induite $\times_{z\in[x,y]}\rho|\cdot|^z$.

1.3. Propriétés des modules de Jacquet des éléments de $\Pi(\psi_L)$. On fixe ρ. Soit $\mathcal{I}$ un sous-ensemble de $Jord(\psi)$ formé de triplets de la forme (ρ, a, b) (c'est le ρ fixé), vérifiant tous $b > 1$; on note $\mathcal{E}$ l'union des segments décroissants $[(a - b)/2, -(a + b)/2 + 1]$ pour (ρ, a, b) parcourant $\mathcal{I}$ et on réordonne $\mathcal{E}$ de sorte que l'ordre sur $\mathcal{E}$ soit l'ordre décroissant pour les demi-entiers.

Lemme. *Soit $\pi \in \Pi(\psi_L)$; alors $Jac_{x\in\mathcal{E}}\pi \neq 0$.*

On ordonne $\mathcal{I}$ de sorte que si $(\rho, a, b) < (\rho, a', b')$ alors $(a-b)/2 \geq (a'-b')/2$ et on récrit 1(2), en utilisant le fait que δ_b est bien défini pour tout $(\rho, a, b) \in \mathcal{I}$ puisque $b > 1$ par hypothèse: $\pi \hookrightarrow$

$$\times_{(\rho,a,b)\in\mathcal{I}} J(St(\rho, a), -(b-1)/2, -\delta_b) \times_{(\rho',a',b')\in Jord(\psi)-\mathcal{I}} J(St(\rho', a'), -(b'-1)/2, -\delta_{b'})$$

$$\times \pi_{temp}.$$

Il est plus simple de remplacer $\mathcal{I}$ par un segment $[1,v]$ pour v un entier convenable et d'écrire les éléments de $\mathcal{I}$ sous la forme $(\rho, a_j, b_j); j \in [1,v]$. On a la suite de morphismes: $\pi \hookrightarrow$

$$J(St(\rho,a_1),-(b_1-1)/2,-\delta_{b_1}) \times_{j\in[2,v]} J(St(\rho,a_j),-(b_j-1)/2,-\delta_{b_j})$$

$$\times_{(\rho',a',b')\in Jord(\psi)-\mathcal{I}} J(St(\rho',a'),-(b'-1)/2,-\delta_{b'}) \times \pi_{temp}$$

$$\hookrightarrow St(\rho,a_1)|\cdot|^{-(b_1-1)/2} \times J(St(\rho,a_1),-(b_1-3)/2,-\delta_{b_1})$$

$$\times_{j\in[2,v]} J(St(\rho,a_j),-(b_j-1)/2,-\delta_{b_j})$$

$$\times_{(\rho',a',b')\in Jord(\psi)-\mathcal{I}} J(St(\rho',a'),-(b'-1)/2,-\delta_{b'}) \times \pi_{temp}$$

$$\simeq St(\rho,a_1)|\cdot|^{-(b_1-1)/2} \times_{j\in[2,v]} J(St(\rho,a_j),-(b_j-1)/2,-\delta_{b_j})$$

$$\times J(St(\rho,a_1),-(b_1-3)/2,-\delta_{b_1})$$

$$\times_{(\rho',a',b')\in Jord(\psi)-\mathcal{I}} J(St(\rho',a'),-(b'-1)/2,-\delta_{b'}) \times \pi_{temp}$$

$$\hookrightarrow St(\rho,a_1)|\cdot|^{-(b_1-1)/2} \times St(\rho,a_2)|\cdot|^{-(b_2-1)/2} \times J(St(\rho,a_2),-(b_2-3)/2,-\delta_{b_2})\times$$

$$_{j\in[3,v]} J(St(\rho,a_j),-(b_j-1)/2,-\delta_{b_j}) \times J(St(\rho,a_1),-(b_1-3)/2,-\delta_{b_1})$$

$$\times_{(\rho',a',b')\in Jord(\psi)-\mathcal{I}} J(St(\rho',a'),-(b'-1)/2,-\delta_{b'}) \times \pi_{temp}$$

et de proche en proche on montre l'existence d'une représentation σ et d'une inclusion

$$\pi \hookrightarrow \times_{j\in[1,v]} St(\rho,a_j)|\cdot|^{-(b_j-1)/2} \times \sigma.$$

On va vérifier que

$$\times_{j\in[1,v]} St(\rho,a_j)|\cdot|^{-(b_j-1)/2} \hookrightarrow \times_{x\in\mathcal{E}} \rho|\cdot|^x.$$

Ceci utilise la propriété de l'ordre mis sur $\mathcal{I}$; d'abord on simplifie l'écriture. Soit pour $i \in [1,v]$ un ensemble de segments décroissants $[d_i, f_i]$ rangé tels que pour $i < i'$, $d_i \geq d_{i'}$. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble avec multiplicité des réels $\bigcup_i \{x \in [d_i, f_i]\}$ rangé dans l'ordre décroissant et on veut montrer que

$$\times_{i\in[1,v]} \langle d_i, f_i\rangle_\rho \hookrightarrow \times_{x\in\mathcal{E}} \rho|\cdot|^x.$$

Disons que l'on fait une récurrence sur $\sum_i (d_i - f_i)$. Si ce nombre est nul chaque segment est réduit à un terme et l'assertion est conséquence du fait que $E = \bigcup_{i\in[1,v]} d_i$ dans cet ordre. Soit i_0 le plus petit indice tel que $d_{i_0} > f_{i_0}$ et notons i_1 le plus grand indice tel que $d_{i_1} = d_{i_0}$. On pose $d = d_{i_0}$ a:

$$\times_{i\in[i_0,i_1]} \langle d_i, f_i\rangle_\rho \hookrightarrow \times_{i\in[i_0,i_1[} \langle d, f_i\rangle_\rho \times \rho|\cdot|^d \times \langle d-1, f_{i_1}\rangle_\rho$$

$$\simeq \rho|\cdot|^d \times_{i\in[i_0,i_1[} \langle d, f_i\rangle_\rho \times \langle d-1, f_{i_1}\rangle_\rho$$

et de proche en proche, on montre

$$\times_{i\in[i_0,i_1]} \langle d_i, f_i\rangle_\rho \hookrightarrow \rho|\cdot|^d \times \cdots \times \rho|\cdot|^d \times_{i\in[i_0,i_1]} \langle d-1, f_i\rangle_\rho,$$

où il y a $i_1 - i_0 + 1$ facteurs $\rho|\cdot|^d$. On obtient: $\times_{i\in[1,v]}\langle d_i, f_i\rangle_\rho \hookrightarrow$

$$\times_{i\in[1,i_0[}\rho|\cdot|^{d_i} \times \rho|\cdot|^d \times \cdots \times \rho|\cdot|^d \times_{i\in[i_0,i_1]} \langle d-1, f_i\rangle_\rho \times_{i>i_1} \langle d_i, f_i\rangle_\rho.$$

Il suffit d'appliquer la récurrence à $\times_{i\in[i_0,i_1]}\langle d-1, f_i\rangle_\rho \times_{i>i_1} \langle d_i, f_i\rangle_\rho$ pour obtenir le résultat annoncé. On a donc montré qu'il existe une représentation σ et une inclusion

$$\pi \hookrightarrow \times_{x\in\mathcal{E}}\rho|\cdot|^x \times \sigma.$$

Par réciprocité de Frobenius le module de Jacquet de π contient un quotient de la forme $\otimes_{x\in\mathcal{E}}\rho|\cdot|^x \otimes \sigma$ et cela force la non nullité de $Jac_{x\in\mathcal{E}}\pi$ comme annoncé.

Remarque. *Le lemme précédent est une propriété extrêmement particulière car les éléments de $\mathcal{E}$ sont rangés dans l'ordre décroissant.*

2. Première définition des paquets d'Arthur et comparaison de certaines orbites unipotentes

2.1. Définition des paquets à la Arthur. Ici on rappelle comment Arthur a défini ses paquets. On considère un morphisme ψ comme précédemment et on a donc déjà défini le morphisme de Langlands ϕ_ψ que l'on voit comme une représentation semi-simple de $W_F \times SL(2,\mathbb{C})$ de dimension m_G^*. Ce morphisme de Langlands définit une représentation irréductible de $GL(m_G^*, F)$ via la correspondance de Langlands ([11], [12]); on la note $\pi^{GL}(\psi)$. Elle est très facile à décrire explicitement: pour $(\rho, a, b) \in Jord(\psi)$, on note $Speh(St(\rho,a), b)$ la représentation notée $J(St(\rho,a), (b-1)/2, -(b-1)/2)$ en **1.3**.

Pour les groupes G que l'on considère ici, sauf les groupes orthgonaux pairs et leurs variantes, Arthur a remarqué qu'un tel groupe se réalise comme le groupe endoscopique principal pour le produit semi-direct de $GL(m_G^*) \times \{1, \theta\}$ (où θ est un automorphisme extérieur); pour les groupes unitaires, l'écriture est un peu différente, il s'agit alors de la situation du changement de base. Dans le cas des groupes orthogonaux pairs, deux difficultés apparaissent, la non connexité, prise en compte par Arthur en contrôlant l'action de l'automorphisme extérieur et le fait que ce ne soit plus qu'un groupe endoscopique elliptique ce qui introduit des facteurs de transfert (compris explicitement). Dans tous les cas, Arthur annonce/démontre l'existence d'un ensemble fini de représentations $\Pi(\psi)$ irréductibles (Arthur l'exprime en demandant qu'une telle représentation soit de longueur finie, mais c'est équivalent en décomposant) tel que la trace tordue de $\pi^{GL}(\psi)$ soit un transfert d'une combinaison linéaire convenable des traces des éléments de $\Pi(\psi)$, cette combinaison linéaire étant stable; ce résultat est conséquence de toute la stabilisation des formules des traces pour le groupe GL tordu et tous ces groupes endoscopiques elliptiques réalisée par Arthur. Ainsi cette formulation d'Arthur donne le calcul de la trace de cette combinaison linéaire et détermine uniquement les éléments de $\Pi(\psi)$; ici on n'a pas besoin de connaître les coefficients.

On a montré en [15] et [17] qu'en fait, pour déterminer $\Pi(\psi)$ il suffit d'avoir le résultat d'Arthur pour les représentations tempérées c'est-à-dire pour les ψ

triviaux sur la deuxième copie de $SL(2,\mathbb{C})$. On revient sur ces constructions dans 3.

2.2. Un lemme sur les modules de Jacquet. On fixe ψ d'où $\pi^{GL}(\psi)$. On fixe aussi un ensemble de demi-entiers $\mathcal{E}$ ordonnés par l'ordre décroissant. Soit $\pi\in\Pi(\psi)$.

Lemme. *On suppose que* $Jac_{x\in\mathcal{E}}\pi\neq 0$ *alors* $Jac^{\theta}_{x\in\mathcal{E}}\pi^{GL}(\pi)\neq 0$.

On ne démontre pas ce lemme ici car pour l'avoir en toute généralité, il faut quand même avoir quelques renseignements sur les éléments de $\Pi(\psi)$. Toutefois, il y a un cas où le lemme résulte immédiatement des résultats d'Arthur sans passer par une description plus précise. En effet, on sait que le transfert commute à la restriction y compris à la restriction partielle telle que définie ici; cela est vérifié en [22] 4.2. Si on sait que l'hypothèse du lemme entraîne que $Jac_{x\in\mathcal{E}}$ de la distribution stable associée à ψ et G est non nul, on aura bien que $Jac^{\theta}_{x\in\mathcal{E}}\pi^{GL}(\psi)\neq 0$. Or un cas évident entraîne cela, c'est le cas où il ne peut pas y avoir de simplification c'est à dire le cas est où tous les coefficients de la combinaison linéaire stable se transférant en la trace tordue de $\pi^{GL}(\psi)$ ont même signe. Arthur a démontré que ceci se produit si pour tout $(\rho,a,b)\in Jord(\psi)$, b est impair. On ne détaille pas puisque l'on fera une démonstration plus générale plus loin. Mais j'espère que cela montre que le lemme n'est pas très profond et c'est ce lemme qui va donner le résultat cherché. Dans cette démonstration (qui n'est que partielle), on n'a pas utilisé le fait que les éléments de $\mathcal{E}$ sont ordonnés par ordre décroissant; la démonstration générale utilise l'hypothèse mais je ne suis pas sûre qu'elle soit indispensable. Mais elle est indispensable pour le corollaire ci-dessous qui est ce que nous utiliserons.

Corollaire. *On suppose que* $Jac_{x\in\mathcal{E}}\pi\neq 0$, *alors dans le groupe linéaire convenable*

$$Jac^{g}_{x\in\mathcal{E}}\times_{(\rho,a,b)\in Jord(\psi)} St(\rho,a)|\cdot|^{-(b-1)/2}\neq 0;$$

ici on considère bien toute l'induite qui n'est pas irréductible en général.

En effet, on rappelle la forme particulièrement simple des représentations $\pi^{GL}(\psi)$; pour cela on utilise la notation matricielle pour des multisegments:

$$Speh(St(\rho,a),b)=$$

$$\begin{pmatrix} (a-b)/2 & (a-b)/2-1 & \cdots & -(a+b)/2+2 & -(a+b)/2+1\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots\\ (a+b)/2-1 & (a+b)/2-2 & \cdots & -(a-b)/2+1 & -(a-b)/2 \end{pmatrix}_{\rho}.$$

Ce qui est important est que les lignes sont des segments décroissants et les colonnes des segments croissants. Et $\pi^{GL}(\psi)$ est l'induite irréductible de ces représentations quand (ρ,a,b) parcourt $Jord(\psi)$. Soit $\mathcal{Y}$ un ensemble de demi-entiers ordonnés de façon décroissante et supposons que $Jac^{g}_{y\in\mathcal{Y}}Speh(St(\rho,a),b)\neq 0$; alors nécessairement $\mathcal{Y}$ est un sous-segment de $[(a-b)/2,-(a+b)/2+1]$: en effet écrivons $\mathcal{Y}=\bigcup_{j\in[1,\ell]} y_j$ avec $y_{j'}\leq y_j$ si $j'<j$. Alors $Jac^g_{y_1}Speh(St(\rho,a),b)\neq 0$ entraîne que $y_1=(a-b)/2$; ensuite $Jac^g_{y_2}Jac^g_{y_1}Speh(St(\rho,a),b)\neq 0$ entraîne que $y_2=(a-b)/2-1$ ou $(a-b)/2+1$ mais la propriété d'ordre assure que seule la première propriété est vraie et on obtient le résultat annoncé de proche en proche. Soit $\mathcal{E}$ comme dans l'énoncé. Comme $Jac^g_{x\in\mathcal{E}}\pi^{GL}(\psi)\neq 0$, il existe un découpage de $\mathcal{E}=\cup\mathcal{E}_{\rho,a,b}$ en sous-ensembles ordonnés par l'ordre induit et indexés par les éléments de $Jord(\psi)$ tel que pour tout $(\rho,a,b)\in Jord(\psi)$, on ait

$$Jac^g_{x\in\mathcal{E}_{\rho,a,b}}Speh(St(\rho,a),b)\neq 0.$$

D'après la remarque précédente cela veut dire que $\mathcal{E}_{\rho,a,b}$ est un sous-segment de $[(a-b)/2,-(a+b)/2+1]$ de même début. Une autre façon de dire les choses est de dire que

$$Jac^g_{x\in\mathcal{E}}\times_{(\rho,a,b)\in Jord(\psi)}St(\rho,a)|\cdot|^{-(b-1)/2}\neq 0.$$

D'où le corollaire.

2.3. Comparaison des orbites unipotentes. On fixe ψ et ψ' des morphismes comme précédemment; on fixe aussi une représentation irréductible ρ de W_F. On note $O^{unip}_{\psi,\rho}$ l'orbite unipotente du groupe linéaire $GL(\sum_{(\rho,a,b)\in Jord(\psi)}ab,\mathbb{C})$ dont les blocs de Jordan sont exactement $\bigcup_{(\rho,a,b)\in Jord(\psi)}\underbrace{(b,\cdots,b)}_{a}$. On définit de même $O^{unip}_{\psi',\rho}$.

Remarque. *On suppose que* $\Pi(\psi)\cap\Pi(\psi')\neq\emptyset$*; on démontrera en 4 que les restrictions de* ψ *et de* ψ' *à* W_F *fois la diagonale de* $SL(2,\mathbb{C})\times SL(2,\mathbb{C})$ *sont conjugués. Donc sous cette hypothèse, pour tout* ρ *comme ci-dessus,* $O^{unip}_{\psi,\rho}$ *et* $O^{unip}_{\psi',\rho}$ *sont relatives au même groupe linéaire.*

Théorème. *On suppose que* $\Pi(\psi)\cap\Pi(\psi'_L)\neq\emptyset$*. Alors, pour toute représentation* ρ *irréductible de* W_F*, l'orbite* $O^{unip}_{\psi,\rho}$ *contient dans sa fermeture l'orbite* $O^{unip}_{\psi',\rho}$*.*

On considère $Jord(\psi')$ et on ordonne les $(\rho,a',b')\in Jord(\psi')$ tel que $b'>1$ par l'ordre décroissant sur b'; c'est à dire que l'on pose $t:=|\{(\rho,a',b')\in Jord(\psi');b'>1\}|$ et que l'on écrit les éléments de $Jord(\psi')$ contenant ρ, sous la forme (ρ,a'_j,b'_j) pour $j\in[1,t]$ de sorte que pour $j<j'$, $b_j\geq b_{j'}$. Pour tout $j\in[1,t]$, on pose $\mathcal{E}_{\leq j}$, l'ensemble des éléments inclus dans l'union de segments $\bigcup_{i\leq j}[(a'_i-b'_i)/2,-(a'_i,b'_i)/2+1]$, ensemble considéré avec multiplicité et réordonné pour que les éléments apparaissent par ordre décroissant. On a vérifié en **1.3** que l'hypothèse de **2.2** est vérifié pour $\mathcal{E}=\mathcal{E}_{\leq j}$ pour tout $j\in[1,t]$. On fixe j et on applique le corollaire de **2.2**. On sait que

$$Jac_{x\in\mathcal{E}_{\leq j}}\times_{(\rho,a,b)\in Jord(\psi)}St(\rho,a)|\cdot|^{-(b-1)/2}\neq 0,$$

dans le groupe linéaire convenable (celui de rang $(d_\rho(\sum_{(\rho,a,b)\in Jord(\psi)}ab))$. Cela force l'existence d'un découpage de chaque segment $[(a-b)/2,-(a+b)/2+1]$ en deux sous-segments, $D'_{\rho,a,b}\cup D''_{\rho,a,b}$ dont l'un peut être vide et dont le premier, s'il est non vide, débute par $(a-b)/2$ et tels que l'on ait l'égalité d'ensembles avec multiplicité mais non ordonnés

$$\mathcal{E}_{\leq j} = \bigcup_{\rho,a,b} D'_{\rho,a,b}. \tag{1}$$

On fixe un tel découpage. On calcule $2\sum_{x\in\mathcal{E}_{\leq j}} x$ de deux façons en utilisant l'égalité ci-dessus. D'abord on utilise le fait $\mathcal{E}_{\leq j}$ est l'union des segments $[(a'_i - b'_i)/2, -(a'_i + b'_i)/2 + 1]$ pour $i \leq j$, chacun de ces segments est de milieu $-(b'_i - 1)/2$, d'où

$$2\sum_{x\in\mathcal{E}_{\leq j}} x = \sum_{i\leq j} -(b'_i - 1)a'_i. \tag{2}$$

On utilise maintenant le membre de droite de (1); fixons (ρ, a, b) tel que $D'_{\rho,a,b} \neq \emptyset$ et notons $m(\rho, a, b, \leq j)$ le nombre d'éléments de cet intervalle. Ce nombre est sûrement inférieur ou égal à a. Comme $D'_{\rho,a,b}$ est un sous-segment du segment décroissant $[(a - b)/2, -(a + b)/2 + 1]$ commençant par $(a - b)/2$, on a encore que deux fois la somme des éléments de ce sous-segment est supérieur ou égal au nombre d'éléments du sous-segment multiplié par deux fois la valeur du milieu du segment c'est-à-dire:

$$2\sum_{x\in D'_{\rho,a,b}} x \geq -m(\rho, a, b, \leq j)(b - 1). \tag{3}$$

D'où l'inégalité:

$$-\sum_{i\leq j} a'_i(b'_i - 1) \geq -\sum_{\rho,a,b} m(\rho, a, b, \leq j)(b - 1).$$

Comme nécessairement

$$\sum_{i\leq j} a'_i = \sum_{\rho,a,b} m(\rho, a, b, \leq j) \qquad (*),$$

ce qui est une propriété non évidente a priori et qui résulte de (1), on obtient

$$\sum_{\rho,a,b} m(\rho, a, b, \leq j)b \geq \sum_{i\leq j} a'_i b'_i.$$

A droite on a la somme des $\sum_{i\leq j} a'_i$ plus grands blocs de Jordan de l'orbite $O^{unip}_{\psi',\rho}$; à gauche on a la somme de $\sum_{i\leq j} a'_i$ blocs de Jordan de l'orbite $O^{unip}_{\psi,\rho}$. On ordonne les blocs de Jordan de l'orbite $O^{unip}_{\psi,\rho}$ sous la forme $b_1 \geq \cdots \geq b_T \geq 0$, chacun intervenant avec sa multiplicité et on ajoute autant de 0 qu'il faudra (ci-dessous on aura besoin de ce que $T \geq T'$ où T' est défini après (4)); on a donc, a fortiori, pour tout $j \in [1, t]$

$$\sum_{k\leq\sum_{i\leq j} a'_i} b_k \geq \sum_{i\leq j} a'_i b'_i. \tag{4}$$

Ces inégalités suffisent pour prouver le théorème. En effet, on pose $T' := \sum_{i\in[1,t]} a'_i + |\{(\rho, a', b') \in Jord(\psi'); b' = 1\}|$; c'est le nombre de blocs de Jordan de

$O^{unip}_{\psi',\rho}$. On doit d'abord montrer que pour tout $\ell \leq T'$, la somme, notée S'_ℓ des ℓ plus grands blocs de Jordan de $O^{unip}_{\psi',\rho}$ est inférieure ou égale à $\sum_{k\leq \ell} b_k$. On fixe j tel que $\ell \in]\sum_{i<j} a'_i, \sum_{i\leq j} a'_i]$ où $j = t+1$ si $\ell \in]\sum_{i\leq t} a'_t, T']$. Si $k = \sum_{i\leq j} a'_i$, on connaît le résultat; on connaît aussi le résultat si $k = T'$; dans ce cas il y a égalité puisque $O^{unip}_{\psi,\rho}$ et $O^{unip}_{\psi',\rho}$ sont relatives au même groupe. Pour ℓ général et $j \leq t$, on a

$$S'_\ell = (\sum_{i<j} a'_i b'_i) + (a'_j - r)b'_j = (\sum_{i\leq j} a'_i b'_i) - rb'_j.$$

D'où, $S'_\ell - \sum_{k\leq \ell} b_k = \left((\sum_{i<j} a'_i b'_i) - (\sum_{k\leq \sum_{i<j} a'_i} b_k) \right) + \sum_{k\in]\sum_{i<j} a'_i, \ell]} (b'_j - b_k)$. Si $b'_j \leq b_\ell$, a fortiori, on a $b'_j \leq b_k$ pour tout $k \leq \ell$ et le terme de droite est négatif ou nul d'après (4) appliqué à $j-1$ et non j. Mais on a aussi, si $j \leq t$

$$S'_\ell - \sum_{k\leq \ell} b_k = \left((\sum_{i\leq j} a'_i b'_i) - (\sum_{k\leq \sum_{i\leq j} a'_i} b_k) \right) - \sum_{k\in]\ell, \sum_{i\leq j} a'_i]} (b'_j - b_k);$$

Supposons que $b'_j \geq b_\ell$, a fortiori, $b'_j \geq b_k$ pour tout $k \geq \ell$ et le terme de droite est encore négatif ou nul d'après (4) appliqué à j. Il reste le cas où $j = t+1$; on a encore deux égalités du même type. La première est

$$S'_\ell - \sum_{k\leq \ell} b_k = \left((\sum_{i\leq t} a'_i b'_i) - (\sum_{k\leq \sum_{i\leq t} a'_i} b_k) \right) + \sum_{k\in]\sum_{i<j} a'_i, \ell]} (b'_j - b_k),$$

qui règle le cas où $b'_\ell = 1 \leq b_\ell$, c'est-à-dire $b_\ell > 0$. Si $b_\ell = 0$, on a $\sum_{k\leq \ell} b_k = \sum_{(\rho,a',b')\in Jord(\psi')} a'b' \geq S'_\ell$ puisque l'on a vu que $O^{unip}_{\psi,\rho}$ est une orbite du même groupe que $O^{unip}_{\psi',\rho}$. Cela termine la preuve.

2.4. Remarque. La démonstration de **2.3** est une conséquence immédiate du résultat de **2.2** qui est en fait plus puissant et en particulier vrai pour toute représentation dans $\Pi(\psi)$. Toutefois **2.2** est technique alors que **2.3** est plus simple à comprendre. Voilà les autres corollaires que l'on peut tirer de **2.2** pour toute représentation π dans $\Pi(\psi)$. On fixe seulement ψ ici et soit $\pi \in \Pi(\psi)$. Soient v un entier et pour $i \in [1, v]$ des couples d'entiers, (α_i, β_i). On suppose que $1 < \beta_1 \leq \cdots \leq \beta_v$. On suppose aussi que, pour tout $j \in [1, v]$, il existe une représentation σ_j convenable avec une inclusion

$$\pi \hookrightarrow \times_{i\in[j,v]} St(\rho, \alpha_i)|\cdot|^{-(\beta_i-1)/2} \times \sigma_j. \tag{1}$$

On remarque que les exposants $-(\beta_i - 1)/2$ vont donc dans l'ordre décroissant ce qui est la condition opposée à celle des paramètres de Langlands. Toutefois, si π n'est pas tempérée, on peut trouver une telle donnée au moins pour $v = 1$. En particulier, on appelle exposant ρ maximal de π, le plus grand entier strictement supérieur à 1 (s'il existe) tel qu'il existe α un entier et σ une représentation avec une inclusion

$$\pi \hookrightarrow St(\rho, \alpha)|\cdot|^{-(\beta-1)/2} \times \sigma.$$

On revient à la situation ci-dessus. On considère l'orbite unipotente dont les blocs de Jordan sont exactement les β_i avec multiplicité α_i. Alors, π étant dans $\Pi(\psi)$, on a:

Remarque. *L'orbite unipotente définie ci-dessus est une orbite d'un groupe* $GL(m',\mathbb{C})$ *avec* $m' \leq \sum_{(\rho,a,b)\in Jord(\psi)}$. *On la considère par inclusion comme une orbite du groupe* $GL(\sum_{(\rho,a,b)\in Jord(\psi)} ab)$ *et elle est dans la fermeture de l'orbite unipotente* $O^{unip}_{\psi,\rho}$. *En particulier, si* π *n'est pas tempérée, l'exposant* ρ *maximal de* π, β *vérifie* $\beta \leq sup_{(\rho,a,b)\in Jord(\psi)} b$.

C'est exactement la démonstration qui a été faite, en particulier la première assertion résulte de (*) ci-dessus. On remarque d'ailleurs que la condition forte que (1) doit être vrai pour tout $j \in [1,v]$ est indispensable: supposons par exemple que $(\rho,a,b) \in Jord(\psi)$ avec b maximum pour cette propriété. On suppose que pour ce choix $a < b$ et soit $\pi \in \Pi(\psi_L)$. Il existe alors σ et une inclusion $\pi \hookrightarrow St(\rho,a)|\cdot|^{(b-1)/2} \times \sigma$. Cette inclusion donne a fortiori

$$\pi \hookrightarrow \times_{x\in[(b-a)/2,(a+b)/2-1]}\rho|\cdot|^{-x} \times \sigma;$$

mais l'orbite de blocs de Jordan $b-a+1,\cdots,a+b-1$ et autant de 1 que nécessaire n'est pas dans la fermeture de l'orbite $O^{unip}_{\psi,\rho}$ dont le plus grand bloc de Jordan est b.

3. Rappel de la construction des représentations dans un paquet d'Arthur

La construction des représentations dans les paquets d'Arthur se fait par récurrence; on en rappelle ici les grandes lignes pour rendre l'article indépendant d'autres références mais les références pour les preuves sont [14], [15], [18]. On se ramène d'abord au cas où pour tout $(\rho,a,b) \in Jord(\psi)$ la représentation $\rho \otimes rep_a \otimes rep_b$ est à valeurs dans un groupe de même type que G^*; exactement on note ψ_{bp} la somme des représentations incluses dans ψ et ayant cette propriété et on note ψ_{mp} la somme des autres; on vérifie que ψ_{mp} s'écrit sous la forme $\psi_{1/2,mp} \oplus \theta^*(\psi_{1/2,mp})$ pour un choix non unique d'une sous-représentation, $\psi_{1/2,mp}$ dans ψ_{mp}. On admet savoir construire $\Pi(\psi_{bp})$ et on a montré en [16] repris en [17] 3.2, que pour tout $\pi_{pb} \in \Pi(\psi_{bp})$, l'induite $\pi^{GL}(\psi_{1/2,mp}) \times \pi_{bp}$ est irréductible et que $\Pi(\psi)$ est constitué exactement de ces induites. En prouvant cette irréductibilité on donne aussi les paramètres de Langlands de π en fonction de ceux de π_{bp}; précisément, on montre que $\pi \hookrightarrow$

$$\times_{(\rho,a,b)\in Jord(\psi_{1/2,mp}),b>1}\Big(J(St(\rho,a),-(b-1)/2,-\delta_b) \times J(St(\tilde\rho,a),-(b-1)/2,-\delta_b)\Big)$$
$$\times_{(\rho,a,b)\in Jord(\psi_{1/2,mp});b\equiv 1[2]}St(\rho,a) \times \pi_{bp}, \qquad (1)$$

où la recette pour obtenir $\tilde\rho$ en fonction de ρ dépend de G (pour les groupes classiques standard $\tilde\rho$ est la contragrédiente de ρ). On montre en plus que l'induite $\times_{(\rho,a,b)\in Jord(\psi_{1/2,mp});b\equiv 1[2]}St(\rho,a) \times \pi_{bp}$ est irréductible elle aussi et que les facteurs $St(\rho,a)$ qui y interviennent commutent avec les $St(\rho_i,\alpha_i)|\cdot|^x$ qui interviennent comme paramètres de Langlands de π_{bp}.

Ensuite on construit $\Pi(\psi)$ quand $\psi = \psi_{bp}$. On fait cette construction en deux étapes. D'abord on considère le cas où pour tout $(\rho,a,b),(\rho,a',b') \in$

$Jord(\psi)$, (le même ρ), $[|(a-b)|+1, a+b-1] \cap [|(a'-b')|+1, a'+b'-1] = \emptyset$. On dit que ψ est de restriction discrète à la diagonale car c'est le cas où la restriction de ψ à W_F fois la diagonale de $SL(2,\mathbb{C}) \times SL(2,\mathbb{C})$ est sans multiplicité. La construction est faite dans [15]; on rappelle qu'elle se fait par récurrence sur $\ell(\psi) := \sum_{(\rho,a,b)\in Jord(\psi)}(\inf(a,b)-1)$. Quand $\ell(\psi)=0$ la construction a été faite en [14] en se ramenant via une généralisation de l'involution d'Iwahori-Matsumoto au cas des séries discrètes; le cas des séries discrètes est dû à Arthur et complété pour les propriétés dont nous avons besoin comme expliqué dans [17]. Le cas général est fait en [15]. Les éléments de $\Pi(\psi)$ sont en bijection avec les couples d'applications $\underline{t}, \underline{\eta}$ de $Jord(\psi)$ à valeurs dans $\mathbb{N} \times \{\pm 1\}$ soumises aux conditions suivantes:

$$\underline{t}(\rho,a,b) \in [0, [\inf(a,b)/2]]$$

et $\underline{\eta}(\rho,a,b) = +$ si $\underline{t}(\rho,a,b) = [\inf(a,b)/2]$ et le signe

$$\times_{(\rho,a,b)\in Jord(\psi)}(\underline{\eta}(\rho,a,b)^{inf(a,b)}(-1)^{[\inf(a,b)/2]+\underline{t}(\rho,a,b)})$$

est déterminé par la forme de G. On rappelle ici un cas simple, le seul où on connaît vraiment les paramètres de Langlands, où ψ en plus d'être de restriction discrète à la diagonale, vérifie que pour tout $(\rho,a,b) \in Jord(\psi)$, $a \geq b$. On a donc les paramètres $\underline{t}, \underline{\eta}$; on construit d'abord un morphisme, ψ_{temp} de $W_F \times SL(2,\mathbb{C})$ dont la décomposition en représentations irréductibles est

$$\bigoplus_{(\rho,a,b)\in Jord(\psi)} \bigoplus\nolimits_{c\in[a-b+1+2t, a+b-1-2t]; (-1)^c=(-1)^{a+b-1}} \rho \otimes rep_c.$$

A l'aide de $\underline{\eta}$, on décrit un caractère η_{temp} du centralisateur de ψ_{temp} (on ne le fait pas ici, car on n'en aura pas besoin); on note π_{temp} la représentation tempérée (ici une série discrète) associée à ces données. Alors la représentation de $\Pi(\psi)$ associée à $\underline{t}$ et $\underline{\eta}$ est l'unique sous-module irréductible de l'induite

$$\pi \hookrightarrow \times_{(\rho,a,b)\in Jord(\psi);\underline{t}(\rho,a,b)>0} St(\rho,a)|\cdot|^{-(b-1)/2} \times \cdots \times St(\rho,a)|\cdot|^{-(b-1)/2+\underline{t}(\rho,a,b)} \times \pi_{temp}.$$

Il n'est pas utile de mettre d'ordre sur $Jord(\psi)$ pour construire l'induite, c'est la condition de restriction discrète à la diagonale qui assure que l'on peut prendre n'importe quel ordre sans changer le résultat; c'est d'ailleurs aussi cette condition qui assure que l'induite a un unique sous-module irréductible.

Dans le cas où ψ est de restriction discrète à la diagonale, on a donc une très bonne paramétrisation des éléments de $\Pi(\psi)$ même si en général, on ne connaît pas leur paramètre de Langlands. La construction est symétrique entre les deux copies de $SL(2,\mathbb{C})$ alors que la paramétrisation de Langlands ne l'est évidemment pas.

Pour passer au cas général, il faut fixer un ordre total, $>$, sur $Jord(\psi)$ qui doit satisfaire à la condition:

pour tout $(\rho,a,b), (\rho,a',b') \in Jord(\psi)$ (même ρ) tels que $(a-b)(a'-b')>0$, si $|(a-b)|/2 > |(a'-b')|/2$ et si $(a+b)/2-1 > (a'+b')/2-1$ alors $(\rho,a,b) > (\rho,a',b')$.

Un ordre qui vérifie cette condition sera dit **un bon ordre**; on fait en plus un choix de signe $\zeta_{\rho,a,b}$ tel que $\zeta_{\rho,a,b}(a-b) \geq 0$; le choix n'est donc que pour les (ρ,a,b) tel que $a-b=0$. On accepte le fait que $Jord(\psi)$ ait de la multiplicité et l'ordre distingue donc entre des éléments de $Jord(\psi)$ qui sont égaux. La paramétrisation de $Jord(\psi)$ dépend de l'ordre fixé mais évidemment pas l'ensemble $\Pi(\psi)$ lui-même (cf. [18] 2.8). Fixons donc un bon ordre sur $Jord(\psi)$; on dit qu'un morphisme $\psi_>$ domine $Jord(\psi)$ si $Jord(\psi_>)$ est lui aussi muni d'un bon ordre et qu'il existe une bijection de $Jord(\psi_>)$ sur $Jord(\psi)$ respectant l'ordre (une telle bijection est uniquement déterminé) et telle que pour tout $(\rho,a,b) \in Jord(\psi)$, il existe $T_{\rho,a,b} \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ tel que l'image réciproque de (ρ,a,b) dans $Jord(\psi_>)$ soit $(\rho, a{+}2T_{\rho,a,b}, b)$ si $\zeta_{\rho,a,b}=+$ et $(\rho,a,b{+}2T_{\rho,a,b})$ si $\zeta_{\rho,a,b}=-$. On ne considère que le cas où il existe $(\rho,a,b) \in Jord(\psi)$ tel que $T_{\rho,a',b'}=0$ pour tout $(\rho,a',b') \leq (\rho,a,b)$ et $T_{\rho,a',b'} \gg T_{\rho,a'',b''}$ pour tout $(\rho,a',b') > (\rho,a'',b'') \geq (\rho,a,b)$. En particulier si (ρ,a,b) est l'élément minimal de $Jord(\psi)$ un tel morphisme sera dit très dominant et en particulier, il est nécessairement de restriction discrète à la diagonale.

Fixons un tel morphisme très dominant, noté $\psi_\gg$. On sait donc définir $\Pi(\psi_\gg)$ et on a montré d'abord en [15] (avec un choix d'ordre particulier) et pour tous les bons ordres en [18] que pour tout $\pi_\gg \in \Pi(\psi_\gg)$, la représentation

$$\circ_{(\rho,a,b)\in Jord(\psi)} \circ_{\ell\in[1,T_{\rho,a,b}]} Jac_{(a-b)/2+\ell,\cdots,\zeta_{\rho,a,b,\gg}((a+b)/2-1+\ell)}\pi_\gg,$$

où l'on prend les éléments de $Jord(\psi)$ dans l'ordre croissant (c'est-à-dire que le plus petit est le plus à gauche), est irréductible ou nulle. Et on a montré que l'ensemble de ces représentations (quand on a enlevé celles qui donnent 0) définit $\Pi(\psi)$. Pour résumer, on choisit l'ordre et les signes $\zeta_{\rho,a,b}$ quand c'est nécesaire. Et alors pour tout $\pi \in \Pi(\psi)$, il existe des fonctions $\underline{t}(\rho,a,b)$ et $\underline{\eta}(\rho,a,b)$ qui vérifient exactement les propriétés ci-dessus mais qui a priori sont définies sur l'ensemble $Jord(\psi)$ vu avec multiplicité pour obtenir toutes les fonctions possibles sur $Jord(\psi_\gg)$ (on a montré en [16] que l'on peut se limiter aux fonctions sur $Jord(\psi)$)); on les remonte en des fonctions sur $Jord(\psi_\gg)$ via la bijection de $Jord(\psi_\gg)$ sur $Jord(\psi)$, on construit $\pi_\gg$ avec ces fonctions et on retrouve π par module de Jacquet, à partir de $\pi_\gg$; ce qui est important est que $\underline{t}$ et $\underline{\eta}$ ne dépendent que de l'ordre et des signes choisis et non de $\psi_\gg$ dominant ψ pour cet ordre.

Le point important dans cette construction est sa transitivité: soit $\psi, \psi_>$, $\psi_\gg$ des morphismes tels que $Jord(\psi)$ soit muni d'un bon ordre et que $\psi_>$ domine ψ (d'où $Jord(\psi_>)$ est muni d'un bon ordre compatible) et tel que $\pi_\gg$ domine $\psi_>$; ainsi $\psi_\gg$ domine ψ et en suivant les définitions on vérifie que le composé de l'application de $\Pi(\psi_\gg)$ sur $\Pi(\psi_>)$ avec l'application de $\Pi(\psi_>)$ sur $\Pi(\psi)$ est l'application de $\Pi(\psi_\gg)$ sur $\Pi(\psi)$; le seul point qui sert est que $Jac_x Jac_y = Jac_y Jac_x$ si $|x-y|>1$. En particulier on obtient la remarque suivante:

Remarque. *On fixe ψ d'où $Jord(\psi)$ et $(\rho,a,b) \in Jord(\psi)$ et $\zeta_{a,b} = \pm 1$ tel que $\zeta_{a,b}(a-b) \geq 0$. On suppose que pour tout $(\rho,a',b') \in Jord(\psi)$ avec $\zeta_{a,b}(a'-b') > 0$, $|(a'-b')/2| > |(a-b)/2|$ et $(a'+b')/2-1 > (a+b)/2-1$, on a en plus $(a'-b')/2 \geq (a+b)/2+1$ alors on note ψ_+ le morphisme qui se déduit de ψ en remplaçant (ρ,a,b) par $(\rho,a+2,b)$ si $\zeta_{a,b}=+$ et $(\rho,a,b+2)$ si $\zeta_{a,b}=-$. Pour tout $\pi_+ \in \Pi(\psi_+)$, $Jac_{(a-b)/2+1,\cdots,\zeta_{a,b}(a+b)/2}\pi_+$ est soit 0 soit un élément irréductible de $\Pi(\psi)$ et tout élément de $\Pi(\psi)$ est obtenu ainsi pour un unique choix de π_+.*

On note (ρ, a_+, b_+) l'élément de $Jord(\psi_+)$ qui vaut $(\rho, a+2, b)$ si $\zeta_{a,b} = +$ et $(\rho, a, b+2)$ sinon. On fixe un bon ordre sur $Jord(\psi_+)$ tel que les éléments de $Jord(\psi_+)$ strictement plus grands que (ρ, a_+, b_+) sont exactement les éléments de la forme (ρ, a', b') avec $(a'-b')/2 \geq (a+b)/2+1$; ceci est possible étant donné les hypothèses. Cet ordre induit un bon ordre sur $Jord(\psi) - \{(\rho, a, b)\}$ qui devient un bon ordre sur $Jord(\psi)$ en disant que $(\rho, a, b) < (\rho, a', b')$ si et seulement si $(a'-b')/2 \geq (a+b)/2+1$. On fixe alors $\psi_\gg$ dominant ψ_+ pour l'ordre fixé et on remarque que $\psi_\gg$ domine alors aussi ψ pour l'ordre fixé. Soit $\pi_\gg \in \Pi(\psi_\gg)$; grâce à cet élément on construit un élément de $\Pi(\psi)$ (ou 0) et un élément de $\Pi(\psi_+)$ (ou 0) en prenant des modules de Jacquet convenable. On commence par faire redescendre les éléments de $Jord(\psi_\gg)$ qui dominent les éléments de $Jord(\psi)$ strictement inférieurs à (ρ, a, b); ce sont aussi ceux qui dominent les éléments de $Jord(\psi_+)$ strictement inférieurs à (ρ, a_+, b_+); l'opération est la même pour ψ et ψ_+; puis on fait redescendre l'élément dominant (ρ, a, b) et (ρ, a_+, b_+); ici il y a une différence car on est arrivé à (ρ, a_+, b_+) il faut encore prendre $Jac_{(a-b)/2+1,\cdots,\zeta_{a,b}(a+b)/2}$ du résultat, que l'on vient d'obtenir, pour arriver à (ρ, a, b). Puis on fait redescendre les éléments de $Jord(\psi_\gg)$ strictement supérieurs à (ρ, a, b) et (ρ, a_+, b_+) ce qui se fait via un module de Jacquet de la forme $Jac_{x\in\mathcal{E}}$ pour un ensemble $\mathcal{E}$ totalement ordonné. Mais d'après les hypothèses pour tout $x \in \mathcal{E}$ on a sûrement $|x| > (a+b)/2+1$; d'où pour tout

$$y \in [(a-b)/2+1, \zeta_{a,b}((a+b)/2)],$$

on a $|x-y| > 1$. Ainsi

$$Jac_{y\in[(a-b)/2+1,\zeta_{a,b}((a+b)/2)]} \circ Jac_{x\in\mathcal{E}} = Jac_{x\in\mathcal{E}} \circ Jac_{y\in[(a-b)/2+1,\zeta_{a,b}((a+b)/2)]}.$$

Ainsi l'élément de $\Pi(\psi)$ obtenu grâce à $\pi_\gg$ s'il est non nul est exactement $Jac_{y\in[(a-b)/2+1,\zeta_{a,b}((a+b)/2)]}\pi_+$ où $\pi_+ \in \Pi(\psi_+)$ est obtenu grâce à $\pi_\gg$; et cet élément est nul exactement si soit $\pi_\gg$ donne déjà 0 dans $\Pi(\psi_+)$ soit $Jac_{y\in[(a-b)/2+1,\zeta_{a,b}((a+b)/2)]}\pi_+ = 0$. Cela termine la preuve de la remarque.

4. Support cuspidal étendu

4.1. Définition et calcul. On a déjà utilisé cette définition de support cuspidal étendu dans plusieurs articles et on la rappelle ici. Soit π_{cusp} une représentation cuspidale d'un groupe de même type que G éventuellement de rang plus petit. A cette représentation on associe un morphisme, ϕ_{cusp}, de $W_F \times SL(2,\mathbb{C})$ dans un groupe $GL(m^*_{cusp}, \mathbb{C})$ pour m^*_{cusp} un entier convenable. On décompose cette représentation en sous-représentations irréductibles $\bigoplus_{(\rho,a)\in Jord(\pi_{cusp}))} \rho \otimes rep_a$, où ρ parcourt un ensemble (avec multiplicité) de représentations irréductibles de W_F et a parcourt un sous-ensemble (avec multiplicité) de $\mathbb{N}$. Ceci définit $Jord(\pi)$. On appelle support cuspidal étendu de π_{cusp} l'ensemble des représentations cuspidales $\bigcup_{(\rho,a)\in Jord(\pi))} \bigcup_{x\in[-(a-1)/2,(a-1)/2]} \rho|\cdot|^x$. Soit π une représentation irréductible de G; on écrit π comme sous-quotient irréductible d'une induite de la forme $\times_{(\rho',z')}\rho'|\cdot|^{z'} \times \pi_{cusp}$, où π_{cusp} est une représentation cuspidale convenable et où (ρ', z') parcourt un ensemble de couples formés d'une représentation cuspidale unitaire irréductible, ρ', d'un groupe linéaire convenable et z' est un réel. On appelle alors support cuspidal étendu de π l'ensemble union du support cuspidal étendu de π_{cusp} et de l'ensemble des représentations $\rho'|\cdot|^{z'}, \rho'^*|\cdot|^{-z'}$ qui interviennent ci-dessus; le sens de $\rho^{',*}$ dépend du groupe, c'est essentiellement la représentation contragrédiente. Le support cuspidal étendu de π est donc bien défini comme ensemble non ordonné (et avec multiplicité).

Soit maintenant un morphisme semi-simple, $\psi_|$ de $W_F \times SL(2,\mathbb{C})$ dans $GL(m^*_G,\mathbb{C})$ continu et unitaire sur W_F et algébrique sur $SL(2,\mathbb{C})$; comme ci-dessus on le décompose en représentations irréductibles $\bigoplus_{(\rho,c)\in Jord(\psi_|)} \rho \otimes rep_c$, ce qui définit $Jord(\psi_|)$ comme ensemble avec multiplicité. On appelle support cuspidal de $\psi_|$ l'ensemble $\bigcup_{(\rho,c) Jord(\psi_|)} \bigcup_{x\in[-(c-1)/2,(c-1)/2]} \rho|\cdot|^x$. Il est extrêmement facile de retrouver $\psi_|$ à conjugaison près (évidemment) quand on connaît son support cuspidal. On fait remarquer au lecteur qu'un tel support cuspidal a une propriété de symétrie forte puisque dans l'union on considère des segments centrés en 0.

Soit ψ ici un morphisme de $W_F \times SL(2,\mathbb{C}) \times SL(2,\mathbb{C})$ dans $GL(m^*_G,\mathbb{C})$. On appelle support cuspidal de ψ le support cuspidal de la restriction de ψ à W_F fois la diagonale de $SL(2,\mathbb{C})$.

Proposition. *Soit ψ un morphisme de $W_F \times SL(2,\mathbb{C}) \times SL(2,\mathbb{C})$ à valeurs dans $GL(m^*_G,\mathbb{C})$ se factorisant par G^*. Soit $\pi \in \Pi(\psi)$ alors le support cuspidal étendu de π est le support cuspidal de ψ.*

On suit les définitions. Considérons d'abord le cas de restrictrion discrète à la diagonale; on traite d'abord le cas des paquets de représentations tempérées qui ici sont nécessairement des paquets de séries discrètes. Donc par hypothèse pour tout $(\rho,a,b) \in Jord(\psi)$, $\inf(a,b) = b = 1$. On a montré en [13] que si $\pi \in \Pi(\psi)$, trois cas sont possibles:

soit il existe (ρ,a,b) avec $a > 2$ avec $(\rho,a-2,b) \notin Jord(\psi)$ et alors en notant ψ' le morphisme qui se déduit de ψ en remplaçant (ρ,a,b) par $(\rho,a-2,b)$, il existe $\pi' \in \Pi(\psi')$ avec $\pi \hookrightarrow \rho|\cdot|^{(a-1)/2} \times \pi'$;

soit le cas précédent n'est pas vérifié mais il existe $(\rho,a,1) \in Jord(\psi)$ avec $a \geq 2$ tel qu'en notant ψ' le morphisme tel que $Jord(\psi')$ se déduit de $Jord(\psi)$ en enlevant $(\rho,a,1)$ et, si $a > 2$, $(\rho,a-2,1)$, il existe $\pi' \in \Pi(\psi')$ tel que $\pi \hookrightarrow \langle (a-1)/2,\cdots,-(a'-1)/2\rangle_\rho \times \pi'$;

soit π est cuspidale.

On démontre donc la proposition dans le cas des morphismes tempérés de restriction discrète à la diagonale par récurrence sur le rang du groupe.

On passe du cas précédent au cas des morphismes élémentaires en utilisant les définitions explicites de [14], on y avait obtenu les représentations cherchées en appliquant une généralisation de l'involution d'Iwahori Matsumoto qui ne change ni le support cuspidal des représentations (donc pas non plus le support cuspidal étendu) ni le support cuspidal des morphismes car on garde constant leur restriction à W_F fois la diagonale de $SL(2,\mathbb{C})$.

On passe au cas d'un morphisme de restriction discrète à la diagonale; ce que l'on a rappelé en 3 n'est pas tout à fait suffisant pour cela, il faut expliquer un peu plus. On fixe donc $\pi \in \Pi(\psi)$ d'où ses paramètres $\underline{t}$ et $\underline{\eta}$. On montre la proposition par récurrence sur $\ell(\psi) := \sum_{(\rho,a,b)\in Jord(\psi)} (\inf(a,b) - 1)$. Si $\ell(\psi) = 0$, on est dans le cas élémentaire qui vient d'être vu. Sinon, on prend $(\rho,a,b) \in Jord(\psi)$ tel que

$\inf(a,b)>1$; on a alors 2 possibilités,
soit $\pi \in \Pi(\psi')$ où ψ' se déduit de ψ en remplaçant (ρ,a,b) par

$$\bigcup_{c\in[|a-b|+1,a+b-1];(-1)^c=(-1)^{a+b-1}} \begin{cases}(\rho,c,1) \text{ si } a\geq b,\\ (\rho,1,c) \text{ si } a<b;\end{cases}$$

soit, on note ψ' le morphisme tel que $Jord(\psi')$ se déduit de $Jord(\psi)$ en remplaçant (ρ,a,b) par $(\rho,a,b-2)$ si $a\geq b$ et par $(\rho,a-2,b)$ si $a<b$ et il existe $\pi'\in\Pi(\psi')$ avec une inclusion $\pi \hookrightarrow \langle (a-b)/2,\cdots,-\zeta(a+b)/2+1\rangle_\rho \times \pi'$, où $\zeta=+$ si $a\geq b$ et $-$ sinon.

Le premier cas est particulièrement facile car on a remplacé la représentation associée à (ρ,a,b) par essentiellement sa restriction à W_F fois la diagonale de $SL(2,\mathbb{C})\times SL(2,\mathbb{C})$ sans changer (évidemment) le support cuspidal de π; dans le deuxième cas

$$\psi_{|W_F\times\Delta_{SL(2,\mathbb{C})\times SL(2,\mathbb{C})}} = \psi'_{|W_F\times\Delta_{SL(2,\mathbb{C})\times SL(2,\mathbb{C})}} \oplus \rho\otimes rep_{|a-b|+1}\oplus\rho\otimes rep_{a+b-1} \text{ et}$$

$$\begin{aligned}&\{\pm x; x\in[(a-b)/2,-\zeta((a+b)/2-1)]\}\\ &=[(a-b)/2,-(a-b)/2]\cup[(a+b)/2-1,-(a+b)/2+1];\end{aligned}$$

l'assertion pour π' et ψ' l'entraîne donc pour π et ψ.

On traite maintenant le cas général. On écrit la décomposition en représentations irréductibles de $\psi=\bigoplus_{(\rho,a,b)\in Jord(\psi)}\rho\otimes rep_a\otimes rep_b$. On suppose d'abord qu'il existe $(\rho,a,b)\in Jord(\psi)$ avec soit $\rho\not\simeq\rho*$ ou (ρ,a,b) de mauvaise parité et on fixe un tel triplet. On note ψ' le morphisme qui se déduit de ψ en enlevant $\rho\otimes rep_a\otimes rep_b\oplus\rho^*\otimes rep_a\otimes rep_b$. On sait que tout élément de $\Pi(\psi)$ est sous-quotient d'une induite de la forme $Speh(St(\rho,a),b)\times\pi'$ où $\pi'\in\Pi(\psi')$. Ainsi le support cuspidal étendu de π s'obtient en ajoutant à celui de π' l'ensemble $\bigcup_{d\in[-(b-1)/2,(b-1)/2,c\in[-(a-1)/2,(a-1)/2}(\rho|\cdot|^{d+c},\rho^*|\cdot|^{d+c})$. Clairement $\bigcup_{d\in[-(b-1)/2,(b-1)/2),c\in[-(a-1)/2,(a-1)/2)} d+c=\bigcup_{e\in[|a-b|+1,a+b-1]_2}\bigcup_{x\in[-(e-1)/2,(e-1)/2} x$; l'indice 2 signifie que l'on ne prend que les entiers dans l'intervalle ayant même parité que les bornes . Ainsi si l'on sait que le support cuspidal étendu de π' coïncide avec le support cuspidal de ψ', on obtient le même résultat pour π et ψ puisque la restriction de la représentation $rep_a\otimes rep_b$ de $SL(2,\mathbb{C})\times SL(2,\mathbb{C})$ à sa diagonale est $\bigoplus_{e\in[|a-b|+1,a+b-1]_2}[e]$. On est donc ramené au cas où le morphisme ψ est de bonne parité. On fixe $\psi_\gg$ dominant ψ, de restriction discrète à la diagonale. On a fixé $\pi\in\Pi(\psi)$; on sait qu'il existe $\pi_\gg\in\Pi(\psi_\gg)$ et une inclusion $\pi_\gg\hookrightarrow\times_{(\rho',x')\in\mathcal{E}}\rho'|\cdot|^{x'}\times\pi$, où l'ensemble $\mathcal{E}$ est de la forme

$$\bigcup_{(\rho,a,b)\in Jord(\psi)}\bigcup_{\ell\in[1,T_{\rho,a,b}}\bigcup_{x\in[(a-b)/2+\zeta_{\rho,a,b}\ell,\zeta_{\rho,a,b}((a+b)/2-1+\ell)]}(\rho,x)$$

où $\zeta_{\rho,a,b}$ est un signe, essentiellement celui de $a-b$, et où $T_{\rho,a,b}$ est l'entier fixé pour chaque (ρ,a,b) tel que $Jord(\psi_\gg)=\bigcup_{(\rho,a,b)\in Jord(\psi)}(\rho,a+(1+\zeta_{\rho,a,b})T_{\rho,a,b},b+(1-\zeta_{\rho,a,b})T_{\rho,a,b})$. Le support cuspidal étendu de π s'obtient donc en enlevant au support cuspidal étendu de $\pi_\gg$ l'ensemble $\bigcup_{(\rho',x')\in\mathcal{E}}(\rho'|\cdot|^{x'},\rho'|\cdot|^{-x'})$. Et d'après la description des $T_{\rho,a,b}$ c'est exactement la même opération qui fait passer du support cuspidal de $\psi_{\gg}$ au support cuspidal de ψ: pour s'en convaincre, on regarde le cas d'une représentation $\rho \otimes rep_a \otimes rep_b$ apparaissant dans ψ et de $\rho\otimes[a+(1+\zeta_{\rho,a,b})T_{\rho,a,b}]\otimes[b+(1-\zeta_{\rho,a,b})T_{\rho,a,b}]$ apparaissant dans $\psi_{\gg}$. En restriction à la diagonale de $SL(2,\mathbb{C})\times SL(2,\mathbb{C})$, la première représentation se décompose en $\bigoplus_{c\in[|a-b|+1,a+b-1]_2}\rho\otimes rep_c$ et la deuxième en $\bigoplus_{c'\in[|a-b|+1+T_{\rho,a,b},a+b-1+T_{\rho,a,b}]_2}\rho\otimes[c']$. Ainsi le support cuspidal de la première représentation s'obtient à partir de celui de la deuxième représentation en enlevant

$$\bigcup_{\ell\in[1,T_{\rho,a,b}]}\cup_{x\in[|a-b|/2+\ell,(a+b)/2-1+\ell]}\rho|\cdot|^x,\rho|\cdot|^{-x};$$

pour obtenir l'assertion annoncée on utilise le fait que $\zeta_{\rho,a,b}$ est le signe de $a-b$ si $a-b\neq 0$ et on a donc pour tout ℓ comme ci-dessus:

$$[|a-b|/2+\ell,(a+b)/2-1+\ell]\cup-[|a-b|/2+\ell,(a+b)/2-1+\ell]=$$

$$[(a-b)/2+\zeta_{\rho,a,b}\ell,\zeta_{\rho,a,b}((a+b)/2-1+\ell)]\cup-[(a-b)/2+\zeta_{\rho,a,b}\ell,\zeta_{\rho,a,b}((a+b)/2-1+\ell)].$$

Cela termine la preuve de la proposition.

4.2. Intersection de 2 paquets d'Arthur. La proposition précédente a comme corollaire immédiat:

Corollaire. *Soient ψ,ψ' des morphismes de $W_F\times SL(2,\mathbb{C})\times SL(2,\mathbb{C})$ dans $GL(m_G^*,\mathbb{C})$ se factorisant par G^*. On suppose que $\Pi(\psi)\cap\Pi(\psi')\neq\emptyset$ alors les restrictions de ψ et de ψ' à W_F fois la diagonale de $SL(2,\mathbb{C})$ sont conjuguées.*

En effet le support cuspidal étendu de π fixe la restriction de ψ et de ψ' à W_F fois la diagonal de $SL(2,\mathbb{C})\times SL(2,\mathbb{C})$.

En général, il semble peu clair de trouver des conditions suffisantes pour que $\Pi(\psi)\cap\Pi(\psi')\neq\emptyset$.

4.3. Exemples. Dans cette section, on donne des exemples de représentations $\pi\in\Pi(\psi)$ telles qu'il existe un autre morphisme ψ' avec $\pi\in\Pi(\psi')$ et plus précisément π dans le paquet de Langlands associé à ψ'. Supposons d'abord que ψ soit de restriction discrète à la diagonale et que pour tout $(\rho,a,b)\in Jord(\psi)$, $a\geq b$. On fixe $\pi\in\Pi(\psi)$ et on note $\underline{t}$ et $\underline{\eta}$ le paramètre de ψ.

Proposition. *Sous les hypothèses ci-dessus, il existe un morphisme ψ' tel que $\pi\in\Pi(\psi'_L)$ si et seulement si pour tout $(\rho,a,b)\in Jord(\psi)$, $\underline{t}(\rho,a,b)\in\{0,[b/2]\}$. De plus, si ceci est réalisé, ψ' se déduit de ψ en remplaçant tous les $(\rho,a,b)\in Jord(\psi)$ tel que $\underline{t}(\rho,a,b)=0$ par $\bigcup_{c\in[a-b+1,a+b-1];c\equiv a+b-1[2]}(\rho,c,1)$.*

On fixe $\pi\in\Pi(\psi)$ et donc ses paramètres $\underline{t}$ et $\underline{\eta}$. Ceux-ci permettent de déterminer les paramètres de Langlands de π et plus précisément: $\pi\hookrightarrow$

$$\left(\times_{(\rho,a,b)\in Jord(\psi);\underline{t}(\rho,a,b)>0}J(St(\rho,a),-(b-1)/2,-(b-1)/2+\underline{t}(\rho,a,b))\right)\times\pi_{temp}, \quad (1)$$

où π_{temp} est une représentation tempérée (ici d'ailleurs une série discrète) dans le paquet associé au morphisme ψ_{temp} tel que

$$Jord(\psi_{temp})=\bigcup_{(\rho,a,b)\in Jord(\psi)}\bigcup_{c\in[a-b+1+2\underline{t}(\rho,a,b),a+b-1-2\underline{t}(\rho,a,b)];(-1)^c=(-1)^{a+b-1}}(\rho,c,1).$$

Soit ψ' un morphisme et $\pi' \in \Pi(\psi'_L)$; on connaît aussi les paramètres de Langlands de π':

$$\pi' \hookrightarrow \times_{(\rho',a',b')\in Jord(\psi');b'>1} J(St(\rho',a'),-(b'-1)/2),-\delta_{b'}) \times \pi'_{temp} \tag{2}$$

où pour tout $(\rho',a',b') \in Jord(\psi')$ avec $b'>1$, $\delta_{b'}=1/2$ si b' est pair et 1 si b' est impair et où π'_{temp} est une représentation tempérée dans le paquet associé au morphisme ψ'_{temp} dont les blocs de Jordan sont $\bigcup_{(\rho,a',b')\in Jord(\psi');b'\equiv 1[2]}(\rho,a',1)$. Il est clair que si $\underline{t}(\rho,a,b)\in\{0,[b/2]\}$ pour tout $(\rho,a,b)\in Jord(\psi)$, le morphisme ψ' décrit dans l'énoncé est tel que (2) soit vérifié pour $\pi=\pi'$ et pour $\pi'_{temp}=\pi_{temp}$. Réciproquement supposons qu'il existe ψ' tel que $\pi\in\Pi(\psi'_L)$; l'unicité des paramètres de Langlands assurent que pour tout $(\rho,a,b)\in Jord(\psi)$ tel que $\underline{t}(\rho,a,b)>0$, on a $(b-1)/2-\underline{t}(\rho,a,b)=\delta_b$ ce qui veut dire que $\underline{t}(\rho,a,b)=[b/2]$. Et on a bien la condition de l'énoncé. Cela termine la preuve.

4.4. Unicité des représentations non ramifiées dans un paquet non ramifié. Ici on suppose que ψ est trivial sur la première copie de $SL(2,\mathbb{C})$ et que la restriction de ψ à W_F est non ramifiée; c'est ce que Clozel dans [10] appelle un paramètre d'Arthur non ramifié. Le résultat ci-dessous est assez "évident", on ne l'inclut que par souci de complétude.

Proposition. *Dans un paquet d'Arthur associé à un paramètre non ramifié, il y a exactement une représentation non ramifiée.*

On fixe donc ψ non ramifié et $\pi\in\Pi(\psi)$. On suppose que π est non ramifié; on connaît alors le support cuspidal de π grâce à **4.1**. En particulier avec un support cuspidal fixé, il y a au plus une représentation non ramifié par la théorie générale. Ainsi $\Pi(\psi)$ a au plus une représentation non ramifiée. Réciproquement comme ψ est non ramifié, le paquet de Langlands à l'intérieur de $\Pi(\psi)$ contient exactement une représentation décrite dans 1 et cette représentation est non ramifiée. D'où la proposition puisque c'est le quotient de Langlands d'une induite non ramifiée.

5. Propriétés des modules de Jacquet

5.1. Preuve de 2.2. On fixe ψ et $\pi\in\Pi(\psi)$. On fixe aussi $\mathcal{E}$ un ensemble de demi-entiers rangés par ordre décroissant. On va montrer **2.2**, c'est-à-dire que

$$Jac_{x\in\mathcal{E}}\pi\neq 0 \Rightarrow Jac^{\theta}_{x\in\mathcal{E}}\pi^{GL}(\psi)\neq 0. \tag{1}$$

On montre cette propriété par récurrence d'abord sur $|\mathcal{E}|$ puis sur

$$\ell_\psi := \sum_{(\rho,a,b)\in Jord(\psi)} (\inf(a,b)-1).$$

D'abord on se ramène au cas où $Jord(\psi)$ est sans multiplicité et de bonne parité: en effet soit $(\rho,a,b)\in Jord(\psi)$ et supposons que cet élément soit y apparaisse avec multiplicité soit ne soit pas de bonne parité. On note ψ' le morphisme qui se déduit de $Jord(\psi)$, en enlevant (ρ, a, b) et $\theta^*(\rho, a, b)$ (θ^* est le dual de l'automorphisme, θ, qui sert pour l'endoscopie tordue, en général la contragrédiente). On sait (cf. [18] 2.6) qu'il existe $\pi' \in \Pi(\psi')$ et une inclusion

$$\pi \hookrightarrow Speh(St(\rho, a), b) \times \pi'. \tag{2}$$

De plus $\pi^{GL}(\psi) \simeq Speh(St(\rho, a), b) \times \theta(Speh(St(\rho, a), b)) \times \pi^{GL}(\psi')$. On applique les formules standard des modules de Jacquet à (2): il existe une décomposition de $\mathcal{E}$ en trois sous-ensembles (dont certains peuvent être vides), $\mathcal{E} = \bigcup_{i\in[1,3]} \mathcal{E}_i$ totalement ordonné par l'ordre induit tels que

$$Jac_{x\in\mathcal{E}_1} Speh(St(\rho, a), b) \neq 0, Jac_{x\in\mathcal{E}_2} \theta^*(Speh(St(\rho, a), b)) \neq 0, Jac_{x\in\mathcal{E}_3} \pi' \neq 0, \tag{3}$$

où les deux premiers calculs de modules de Jacquet se font dans le groupe linéaire convenable. Il y a une condition supplémentaire aux non nullité ci-dessus: si $\rho \not\simeq \theta^*(\rho)$, $\mathcal{E}_2 = \emptyset$ et il n'y a rien à ajouter. Sinon, il faut aussi que $\mathcal{E}_1 \cup -\mathcal{E}_2 \subset \bigcup_{\ell\in[(a-b)/2,(a+b)/2-1]} [\ell, \ell - a]$. On conclut donc facilement que l'implication (1) pour π résulte de son analogue avec $\mathcal{E}$ remplacé par $\mathcal{E}_3$ pour π' mais on va détailler en utilisant les simplifications dues au fait que $\mathcal{E}$ est rangé par ordre décroissant; on suppose que $\rho \simeq \theta^*\rho$ pour qu'il y ait quelque chose de non trivial à montrer. La non nullité des deux premiers modules de Jacquet dans (3) assure que $\mathcal{E}_1$ est un sous-intervalle de $[(a-b)/2, -(a+b)/2+1]$ et que $\mathcal{E}_2$ est aussi un sous-intervalle de $[(a-b)/2, -(a+b)/2+1]$ et la condition supplémentaire ne joue que si $b = 1$ et dit que $\mathcal{E}_1 \cup -{}^t\mathcal{E}_2 \subset [(a-1)/2, -(a-1)/2]$, où ^{t} est l'inversion de l'ordre. On a donc $Jac^g_{x\in\mathcal{E}_1} Jac^d_{x\in-{}^t\mathcal{E}_2} Speh(St(\rho, a), b) \neq 0$ et de même $Jac^g_{x\in\mathcal{E}_2} Jac^d_{x\in-{}^t\mathcal{E}_1} Speh(St(\rho, a), b) \neq 0$. D'où certainement

$$Jac^\theta_{x\in\mathcal{E}_1\cup\mathcal{E}_2}\Big(Speh(St(\rho, a), b) \times Speh(St(\rho, a), b)\Big) \neq 0$$

et si on sait que $Jac^\theta_{x\in\mathcal{E}_3}\pi^{GL}(\psi') \neq 0$ on aura certainement (1). On est donc ramené au cas où $Jord(\psi)$ est de bonne parité et n'a pas de multiplicité.

Soit x_0 l'élément maximal de $\mathcal{E}$. On fixe un bon ordre total sur $Jord(\psi)$ tel que $(\rho, a, b) < (\rho, a', b')$ si $(a-b)/2 \leq x_0$ et $(a'-b')/2 > \sup(-1/2, x_0)$. On fixe $\psi_>$ un morphisme dominant ψ, tel que

(a) $Jord(\psi_>)$ contient tous les éléments de $Jord(\psi)$ de la forme (ρ, a, b) avec $(a-b)/2 \leq x_0$

(b) pour tout $(\rho, a_>, b_>) \in Jord(\psi_>)$ vérifiant $(a_> - b_>)/2 > x_0$ on a même $\gg x_0$.

On sait qu'il existe $\pi_>$ tel que π s'obtient à partir de $\psi_>$ en prenant des modules de Jacquet de la forme $Jac_{y\in\mathcal{Y}}$; comme $Jord_{\psi_>}$ vérifie (a), on sait que les éléments de $\mathcal{Y}$ sont tous strictement supérieurs à $x_0 + 1$. On a donc aussi

$$Jac_{x\in\mathcal{E}}\pi = Jac_{x\in\mathcal{E}} Jac_{y\in\mathcal{Y}}\pi_> = Jac_{y\in\mathcal{Y}} Jac_{x\in\mathcal{E}}\pi_>.$$

En particulier si $Jac_{x\in\mathcal{E}}\pi \neq 0$, nécessairement $Jac_{x\in\mathcal{E}}\pi_> \neq 0$. On pose

$$\pi^{GL}_{\leq} := \times_{(\rho,a',b')\in Jord(\psi);(a'-b')/2\leq x_0} Speh(St(\rho, a), b)$$

et on a $\pi^{GL}(\psi) = \pi^{GL}_{\leq} \times \sigma$ où σ est explicite et vérifie $Jac_{x\in\mathcal{E}'}\sigma = 0$ pour tout sous-ensemble non vide $\mathcal{E}'$ de $\mathcal{E}$. De plus $\pi^{GL}(\psi_>)$ est une induite analogue à $\pi^{GL}_{\leq} \times \sigma_>$. Ainsi si $Jac^\theta_{x\in\mathcal{E}}\pi^{GL}(\psi_>) \neq 0$, nécessairement $Jac^\theta_{x\in\mathcal{E}}\pi^{GL}_{\leq} \neq 0$ et $Jac^\theta_{x\in\mathcal{E}}\pi^{GL}(\psi) \neq 0$. Il suffit donc de montrer (1) pour $\pi_>$. On suppose donc que $\pi = \pi_>$, c'est-à-dire que pour tout $(\rho,a,b) \in Jord(\psi)$ si $(a-b)/2 > x_0$, on a $(a-b)/2 \gg x_0$.

Puisqu'en particulier, $Jac_{x_0}\pi \neq 0$, on sait (cf. [18] 2.7), qu'il existe $(\rho,a,b) \in Jord(\psi)$ avec $x_0 = (a-b)/2$. Si $\sup(a,b) > 1$, on a alors certainement

$$Jac^\theta_{x_0} Speh(St(\rho,a),b) \neq 0 \text{ et } Jac^\theta(\pi^{GL})(\psi) \neq 0.$$

Supposons que pour tout tel choix de (ρ,a,b), on a $a = b = 1$, d'où nécessairement $x_0 = 0$; on a supposé que $Jord(\psi)$ n'a pas de multiplicité et on vérifie que l'on ne peut alors avoir $Jac_{x_0}\pi \neq 0$; en effet, on peut considérer que $(\rho,1,1)$ est le plus petit élément de $Jord(\psi)$. Par les hypothèses, on sait que pour tout $(\rho,a',b') \in Jord(\psi)$ différent de cet élément, $|(a'-b')/2| \geq 1$. On obtient donc π comme module de Jacquet à partir d'une représentation $\pi_\gg$, en ayant $\pi = Jac_{y\in\mathcal{Y}}\pi_\gg$; tous les éléments de $\mathcal{Y}$ sont de valeurs absolue au moins 2. On vérifie sur la définition de $\pi_\gg$ que $Jac_0\pi_\gg = 0$ et comme $Jac_0 \circ Jac_{y\in\mathcal{Y}} = Jac_{y\in\mathcal{Y}} \circ Jac_0$, on a aussi $Jac_0\pi = 0$. Ainsi on vient de démontrer le cas où $\mathcal{E}$ est réduit à x_0, ce qui initie la récurrence sur $\mathcal{E}$.

On suppose donc que $\mathcal{E}$ n'est pas réduit à x_0 et on considère d'abord le cas où $x_0 \geq 0$. On va utiliser aussi la récurrence sur $\ell(\psi)$ que l'on va initialiser.

Supposons pour commencer que pour tout $(\rho,a,b) \in Jord(\psi)$ si $x_0 = (a-b)/2$ alors $\inf(a,b) = 1$. Cela se produit par exemple si $\ell(\psi) = 0$. On a vu ci-dessus, que nécessairement $\sup(a,b) > 1$. Avec l'hypothèse que $Jord(\psi)$ n'a pas de multiplicité, on sait donc qu'il existe un unique (ρ,a,b) vérifiant la propriété $x_0 = (a-b)/2$; on rappelle qu'ici $x_0 \geq 0$, d'où $a > b = 1$. On note ψ' le morphisme qui se déduit de ψ en remplaçant (ρ,a,b) par $(\rho,a-2,b)$ ou en enlevant (ρ,a,b) si $a = 2$. On vérifie que $Jac_{x_0}\pi \in \Pi(\psi')$ et que $Jac^\theta_{x_0}\pi^{GL}(\psi) = \psi'$; pour la première assertion, on applique la définition des éléments de $\Pi(\psi')$, c'est exactement comme cela qu'on les obtient. La deuxième assertion est un calcul simple (qui en fait est utilisé dans la définition de $\Pi(\psi')$):

$$\pi^{GL}(\psi) = \times_{(\rho',a',b')\neq(\rho,a,b)} Speh(St(\rho',a'),b') \times St(\rho,a).$$

Or $Jac^g_{x_0} Speh(St(\rho',a'),b') = 0 = Jac^d_{-x_0} Speh(\rho',a',b')$ pour tout $(\rho,a',b') \neq (\rho,a,1)$ car $(a'-b')/2 \neq x_0$, et $Jac^\theta_{(a-1)/2)} St(\rho,a) = St(\rho,a-2)$, d'où a fortiori

$$Jac^\theta_{x_0}\pi^{GL}(\psi) = \times_{(\rho',a',b')\neq(\rho,a,b)} Speh(St(\rho',a'),b') \times St(\rho,a-2) = \pi^{GL}(\psi').$$

Il suffit maintenant d'appliquer le résultat à ψ' et $\mathcal{E} - \{x_0\}$ ce qui est loisible par récurrence sur $|\mathcal{E}|$ et on obtient le résultat. D'où en particulier l'initialisation de la récurrence sur $\ell(\psi)$.

On suppose maintenant qu'il existe $(\rho,a,b) \in Jord(\psi)$ tel que $(a-b)/2 = x_0$ et $b > 1$; on fixe un tel élément. On va alors diminuer $\ell(\psi)$. On fixe un bon ordre sur $Jord(\psi)$ de sorte que (ρ,a,b) soit l'élément maximal parmi les $(\rho,a',b') \in Jord(\psi)$ vérifiant $(a'-b')/2 \leq x_0$. Ceci est possible. On note $\underline{t}$

et $\underline{\eta}$ les paramètres permettant de définir ψ. On fixe T un entier "grand" et on note ψ_T le morphisme qui s'obtient à partir de ψ en remplaçant (ρ, a, b) par $(\rho, a+2T, b)$ pour T grand. On rappelle que l'on a fait l'hypothèse que pour tout $(\rho, a', b') \in Jord(\psi)$ avec $(a'-b')/2 > x_0$, on a $a' \gg b'$; on peut donc supposer que ψ_T domine ψ pour l'ordre fixé. Ainsi $\Pi(\psi)$ s'obtient à partir de $\Pi(\psi_T)$ en prenant les modules de Jacquet qui font descendre $(\rho, a+2T, b)$ vers (ρ, a, b). Précisément, on sait qu'il existe $\pi_T \in \Pi(\psi_T)$ tel que

$$\pi = \circ_{\ell \in [1,T]} Jac_{(a-b)/2+T-\ell+1, \cdots, (a+b)/2+T-\ell} \pi_T.$$

On pose $t := \underline{t}(\rho, a, b)$ et on note ψ'_T le morphisme qui se déduit de ψ_T en remplaçant $(\rho, a+2T, b)$ par $\bigcup_{c \in [a-b+1+t, a+b-1-t], (-1)^c = (-1)^{a+b-1}} (\rho, c+2T, 1)$. On sait qu'il existe une représentation $\pi'_T \in \Pi(\psi'_T)$ et une inclusion

$$\pi_T \hookrightarrow \langle \times_{j \in [1,t]} St(\rho, a+2T) |\cdot|^{(b-1)/2+j-1} \rangle \times \pi'_T. \tag{4}$$

Les crochets indiquent que l'on prend l'unique sous-module irréductible pour l'induite écrite. Pour tout $T' \in [0, T[$, on définit par récurrence descendante $\pi_{T'} := Jac_{(a-b)/2+T'+1, \cdots, (a+b)/2+T'} \pi_{T'+1}$. On sait que le résultat est une représentation irréductible dans $\Pi(\psi_{T'})$ analogue de ψ_T quand $T = T'$. On définit $\pi'_{T'}$ de façon analogue en appliquant $Jac_{(a-b)/2+t+T'+1, \cdots, (a+b)/2-t+T'} \pi'_{T'+1}$. On sait aussi que si cette représentation est non nulle, c'est un élément de $\Pi(\psi'_{T'})$ obtenu en remplaçant T par T' dans la définition ci-dessus. On montre par récurrence descendante que

$$\pi_{T'} \hookrightarrow \langle \times_{j \in [1,t]} St(\rho, a+2T') |\cdot|^{-(b-1)/2+j-1} \rangle \times \pi'_{T'};$$

il suffit d'oublier que dans (4), T est grand et de calculer, $Jac_{(a-b)/2+T, \cdots, (a+b)/2-1+T}$ aux deux membres de (4). En fait on calcule d'abord $Jac_{(a-b)/2+T, \cdots, (a-b)/2+T+t}$ du membre de droite; pour tout $x \in [(a-b)/2+T, (a-b)/2+T+t-1]$, $Jac_x \pi'_T = 0$ car pour tout $(\rho, a'', b'') \in Jord(\psi'_T)$, ou bien $(a''-b'')/2 < x_0$ ou bien $(a''-b'')/2 \gg x_0$ ou bien $(a''-b'')/2 \in [(a-b)/2+t, (a+b)/2-1-t]$ et donc il n'existe aucun élément de $Jord(\psi'_T)$, (ρ, a'', b''), tel que $(a''-b'')/2 = x$. On écrit $\langle \times_{j \in [1,t]} St(\rho, a+2T') |\cdot|^{(b-1)/2+j-1} \rangle$ comme la représentation attachée à ρ et aux multisegments:

$$\begin{array}{ccc} (a-b)/2+T & \cdots & -(a+b)/2+1-T \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (a-b)/2+t-1+T & \cdots & -(a+b)/2+t-T \end{array}$$

Quand on applique $Jac_{(a-b)/2+T, \cdots, (a-b)/2+T+t}$, on enlève la première colonne. Ensuite on applique $Jac_{(a-b)/2+t+T, \cdots, (a+b)/2-1-t+T}$ qui lui n'agit que sur π'_T pour donner par définition π'_{T-1}. Ensuite on applique $Jac_{(a+b)/2-t+T, \cdots, (a+b)/2+T}$; on vérifie encore que pour tout $x \in [(a+b)/2-t+T, (a+b)/2+T]$, $Jac_x \pi'_{T-1} = 0$ et le résultat est donc d'enlever la dernière colonne de la matrice ci-dessus. En mettant ces trois calculs ensemble on voit qu'appliquer le module de Jacquet au membre de droite de (4) revient à remplacer T par $T-1$. Progressivement, on obtient

$$\pi \hookrightarrow \langle \times_{j \in [1,t]} St(\rho, a) |\cdot|^{-(b-1)/2+j-1} \rangle \times \pi'_0, \tag{5}$$

où $\pi'_0 \in \Pi(\psi'_0)$. On applique $Jac_{x\in\mathcal{E}}$ aux deux membres de (5). Il faut différentier suivant que $t=0$ ou non. Dans le premier cas, $\pi=\pi'_0$; on a alors

$$\pi^{GL}(\psi'_0) = \times_{c\in[(a-b)+1,(a+b)-1],(-1)^c=(-1)^{a+b-1}} St(\rho,c) \times_{(\rho',a',b')\neq(\rho,a,b)} Speh(St(\rho',a'),b').$$

$$Jac^{\theta}_{x\in\mathcal{E}}\pi^{GL}(\psi'_0) =$$
$$Jac^{g}_{x\in\mathcal{E}_g} Jac^{d}_{-x\in\mathcal{E}_d} St(\rho,a-b+1) \times_{c\in](a-b)+2,(a+b)-1],(-1)^c=(-1)^{a+b-1}} St(\rho,c)$$
$$\times Jac_{x\in\mathcal{E}-\mathcal{E}_g-\mathcal{E}_d} \times_{(\rho',a',b')\neq(\rho,a,b)} Speh(St(\rho',a'),b'), \qquad (6)$$

où $\mathcal{E}_g$ est soit vide soit réduit à x_0 et $\mathcal{E}_d$ est soit vide soit réduit à x_0. De façon analogue, on a

$$\pi^{GL}(\psi) = Speh(St(\rho,a),b) \times_{(\rho',a',b')\neq(\rho,a,b)} Speh(St(\rho',a'),b').$$

Quand on calcule $Jac^{\theta}_{x\in\mathcal{E}}\pi^{GL}(\psi)$ on obtient des termes indexés par deux sous-segments, de $[(a-b)/2,-(a+b)/2]$ chacun étant vide ou commençant par $(a-b)/2$ que l'on note $\mathcal{E}_g$ et $\mathcal{E}_d$ par analogie au calcul précédent et le résultat est comme ci-dessus. A fortiori si (6) est non nul, $Jac^{\theta}_{x\in\mathcal{E}}\pi^{GL}(\psi)\neq 0$. Or on connaît le résultat pour π'_0 puisqu'ici on ne change pas $\mathcal{E}$ mais que l'on baisse $\ell(\psi)$ et que l'on a déjà amorcé la récurrence pour $x_0\geq 0$.

On traite maintenant le cas où $t>0$. On utilise tout de suite le fait que les éléments de $\mathcal{E}$ sont rangés par ordre décroissant; le module de Jacquet du membre de droite de (5) a une filtration dont les termes du gradué associé sont indexés par les sous-segments $\mathcal{E}_1$ de $[(a-b)/2,-(a+b)/2+1]$ soit vide soit commençant par $(a-b)/2$ et le terme correspondant est

$$Jac_{x\in\mathcal{E}_1}\langle\times_{j\in[1,t]}St(\rho,a)|\cdot|^{-(b-1)/2+t-1}\rangle \times Jac_{x\in\mathcal{E}_2}\pi'_0,$$

où $\mathcal{E}_2$ est le complémentaire de $\mathcal{E}_1$ dans $\mathcal{E}$. On peut appliquer le résultat par récurrence à π'_0 et $\mathcal{E}_2$ car soit $\mathcal{E}_2$ est strictement plus petit que $\mathcal{E}$ et on utilise la récurrence sur le cardinal de $\mathcal{E}$ soit on a égalité et on utilise la récurrence sur $\ell(\psi)$.

Pour conclure, il suffit de remarquer que

$$Jac^{\theta}_{x\in\mathcal{E}_2}\pi^{GL}(\psi'_0)\neq 0 \Rightarrow Jac^{\theta}_{x\in\mathcal{E}_2}\times_{(\rho',a',b')\neq(\rho,a,b)} Speh(St(\rho',a'),b')\neq 0$$

et que $Jac^{\theta}_{x\in\mathcal{E}}\pi^{GL}(\psi)$ contient

$$Jac^{\theta}_{x\in\mathcal{E}_1}Sp(St(\rho,a),b) \times Jac^{\theta}_{x\in\mathcal{E}_2}\times_{(\rho',a',b')\neq(\rho,a,b)} Speh(St(\rho',a'),b')$$

qui est alors non nul.

Il reste le cas où $x_0<0$. Ici on fait une récurrence sur $\sum_{(\rho,a,b)\in Jord(\psi);a<b} b$. Si ce nombre vaut 0, on a $Jac_{x_0}\pi=0$ et il n'y a rien à démontrer. On a déjà réduit au cas où $Jord(\psi)$ est de bonne parité, sans multiplicité et où pour tout $(\rho,a,b)\in Jord(\psi)$ si $a\geq b$ alors $a\gg b$; cela ne change pas le nombre sur lequel on fait une récurrence. On fixe (ρ,a,b) tel que $|(a-b)/2|$ soit minimal, d'où certainement $(a-b)/2\geq x_0$ pour qu'il y ait quelque chose à démontrer. Le choix

n'est pas unique mais on en fait un. On fixe un bon ordre sur $Jord(\psi)$ tel que (ρ,a,b) soit l'élément minimal; ceci est possible. D'abord on montre que l'on peut supposer que $a=b$ ou $a=b-1$. En effet, s'il n'en est pas ainsi, on note ψ' le morphisme qui se déduit de ψ en changeant (ρ,a,b) par $(\rho,a,b-2)$ et on vérifie qu'il existe $\pi'\in\Pi(\psi')$ avec une inclusion

$$\pi\hookrightarrow St(\rho,a)|\cdot|^{-(b-1)/2}\times\pi'; \tag{7}$$

en effet ceci est montré en [15] dans le cas ou ψ est de restriction discrète à la diagonale et cela s'applique donc ici pour $\psi_{\gg}$ dominant ψ et donc $\psi'_{\gg}$ dominant ψ'; d'où

$$\pi_{\gg}\hookrightarrow St(\rho,a)|\cdot|^{-(b-1)/2}\times\pi'_{\gg};$$

Pour obtenir π à partir de $\pi_{\gg}$, il faut appliquer des $Jac_{y,y\in\mathcal{Y}}$ mais avec nos hypothèses sur ψ, on est sûr que $\mathcal{Y}$ est formé d'éléments négatifs tous strictement inférieur à $(a-b)/2$; ainsi $Jac_{y,y\in\mathcal{Y}}$ appliqué au terme de droite commute à l'induction par $St(\rho,a)|\cdot|^{-(b-1)/2}$ et on obtient (7).

On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à π' pour $\mathcal{E}$ ou pour tout sous-ensemble de $\mathcal{E}$. Soit $\mathcal{F}$ un sous-ensemble de $\mathcal{E}$ héritant de l'ordre de $\mathcal{E}$. On vérifie encore que $Jac^{\theta}_{x\in\mathcal{F}}\pi^{GL}(\psi')\neq 0$ nécessite que $Jac^{\theta}_{x\in\mathcal{F}}\times_{(\rho',a',b')\neq(\rho,a,b)} Speh(St(\rho',a'),b')\neq 0$ puisque (ρ,a,b) n'est plus dans $Jord(\psi')$ et qu'il est remplacé par $(\rho,a,b-2)$ avec certainement $(a-b+2)/2=(a-b)/2+1>x_0$. On conclut ensuite exactement comme dans la fin de la preuve du cas $x_0\geq 0$. Le cas $a=b$, a déjà été traité puisqu'on l'a ramené à $a\gg b$. Il faut voir le cas où $a=b-1$. On note $\underline{t}$ et $\underline{\eta}$ les paramètres de π pour l'ordre choisi. Et on pose $t:=\underline{t}(\rho,a,b)$ et $\eta:=\underline{\eta}(\rho,a,b)$.

On termine la preuve en admettant momentanément le lemme ci-dessous: en effet dans le cas (i) de ce lemme, on applique l'hypothèse de récurrence à ψ' et on obtient facilement le résultat pour ψ. Dans le cas (ii), on raisonne comme ci-dessus.

Lemme. (i) *On suppose que $t=0$ et que $\eta=-$. Ce cas est très simple: on note ψ' le morphisme qui se déduit de ψ en changeant $(\rho,a,a+1)$ en $(\rho,a+1,a)$ alors $\pi\in\Pi(\psi')$.*

(ii) *On suppose que $t\neq 0$ ou que $\eta\neq -$. On note ψ' le morphisme qui se déduit de ψ en remplaçant $(\rho,a,a+1)$ par $(\rho,a,a-1)$. Alors, il existe $\pi'\in\Pi(\psi')$ et une inclusion*

$$\pi\hookrightarrow St(\rho,a)|\cdot|^{-a/2}\times\pi'.$$

Le (i) est vrai par définition si ψ est de restriction discrète à la diagonale; on l'applique à $\psi_{\gg}$ dominant ψ. Et (i) reste vrai quand on a appliqué les modules de Jacquet pour redescendre de $\psi_{\gg}$ à ψ puisque l'on ne modifie pas le plus petit bloc de Jordan qui est $(\rho,a,a+1)$ par notre choix.

On suppose encore que $t=0$ mais que $\eta=+$. On fixe encore $\psi_{\gg}$ dominant ψ et contenant $(\rho,a,a+1)$ comme plus petit élément. Soit $\pi_{\gg}\in\Pi(\psi_{\gg})$ déterminé par $\underline{t},\underline{\eta}$. Par construction, $\pi_{\gg}\in\Pi(\psi'_{\gg})$ ou $\psi'_{\gg}$ se déduit de $\psi_{\gg}$ en remplaçant $(\rho,a,a+1)$ par $(\rho,1,2j)$ pour $j\in[1,a]$. Et comme le signe alterne sur ces blocs en prenant la valeur $+$ sur $(\rho,1,2)$, on a construit $\pi_{\gg}$ comme sous-module irréductible de l'induite

$$\pi_{\gg} \hookrightarrow \langle -1/2, \cdots, -a/2\rangle_\rho \times \pi''_{\gg},$$

où $\pi''_{\gg} \in \Pi(\psi'_{\gg})$ avec $\psi''_{\gg}$ qui se déduit de $\psi'_{\gg}$ en remplaçant $(\rho,1,2j)$ par $(\rho,1,2j-2)$ pour tout $j\in]1,a]$ ($(\rho,1,2)$ disparît). Le signe est la restriction du signe pour $\psi'_{\gg}$ de façon naturelle; il alterne sur ces blocs en commençant maintenant par $-$; on peut donc remplacer $(\rho,1,2j-2)$ par $(\rho,2j-2,1)$ (c'est dans les définitions). On note ψ'' le morphisme qui se déduit de ψ en remplaçant $(\rho,a,a+1)$ par $\bigcup_{j\in[1,a-1]}(\rho,2j,1)$ et on montre qu'il existe $\pi''\in\Pi(\psi'')$ avec une inclusion

$$\pi \hookrightarrow \langle -1/2, \cdots, -a+1/2\rangle_\rho \times \pi''.$$

Pour arriver à ce résultat on applique les modules de Jacquet qui font passer de $\psi_{\gg}$ à ψ et ils ne touchent pas aux blocs $(\rho,2j,1)$ ni à la représentation $\langle -1/2,\cdots,-a/2\rangle_\rho$ car ils sont de la forme $Jac_{y\in\mathcal{Y}}$ avec $y\leq -3/2$. Pour avoir exactement l'énoncé du lemme on regroupe les $\bigcup_{j\in[1,a-1]}(\rho,2j,1)$ en $(\rho,a,a-1)$ (ce qui est loisible); les paramètres pour π'' sont $\underline{t}'',\underline{\eta}''$; ils coïncident avec $\underline{t},\underline{\eta}$ sur $Jord(\psi)-\{(\rho,a,a+1)\}$ et valent

$$\underline{t}''(\rho,a,a-1)=0, \underline{\eta}''(\rho,a,a-1)=-.$$

On ne suppose plus que $t=0$; comme ci-dessus, on peut supposer que ψ est de restriction discrète à la diagonale. On définit ψ'' en changeant dans $Jord(\psi)$, $(\rho,a,a+1)$ en $(\rho,a,a-1)$. On définit $\underline{t}'',\underline{\eta}''$ sur $Jord(\psi'')$ en demandant qu'ils coïncident avec $\underline{t}$ et $\underline{\eta}$ sur $Jord(\psi)-\{(\rho,a,a+1)\}$ et valent

si $\eta=+$, $\underline{t}''(\rho,a,a-1)=t-1$ et $\underline{\eta}''(\rho,a,a-1)=-$;

si $\eta=-$, $\underline{t}''(\rho,a,a-1)=t$ et $\underline{\eta}''(\rho,a,a-1)=+$.

On note ψ_1 le morphisme qui se déduit de ψ en changeant $(\rho,a,a+1)$ en $(\rho,a-2,a+1)$ et $\underline{t}_1,\underline{\eta}_1$ qui se déduisent naturellement de $\underline{t}$ et $\underline{\eta}$ avec comme seul changement que $\underline{t}_1(\rho,a-2,a+1)=t-1$. On note π_1 la représentation dans $\Pi(\psi_1)$ correspondante et par définition

$$\pi \hookrightarrow \langle -1/2,\cdots,a-1/2\rangle_\rho \times \pi_1.$$

On peut passer de $(\rho,a-2,a+1)$ à $(\rho,a-2,a-1)$ sans changer les paramètres, ce qui donnent une représentation π'_1 et une inclusion

$$\pi_1 \hookrightarrow \langle -3/2,\cdots,-a+1/2\rangle_\rho \times \pi'_1.$$

On utilise l'inclusion de la représentation de Steinberg tordue $\langle -1/2,\cdots,a-1/2\rangle_\rho$ dans l'induite $\rho|\cdot|^{-1/2}\times\langle 1/2,\cdots,a-3/2\rangle_\rho\times\rho|\cdot|^{a-1/2}$ et on compose avec l'inclusion ci-dessus. On obtient

$$\pi \hookrightarrow \rho|\cdot|^{-1/2}\times\langle -3/2,\cdots,-a+3/2\rangle_\rho\times\langle 1/2,\cdots,a-3/2\rangle_\rho\times\rho|\cdot|^{a-1/2}\times\pi'_1.$$

Mais $\rho|\cdot|^{a-1/2}\times\pi'_1$ est irréductible donc isomorphe à $\rho|\cdot|^{-a+1/2}\times\pi'_1$. D'où une inclusion

$$\pi \hookrightarrow \rho|\cdot|^{-1/2}\times < -3/1,\cdots,-a+3/2\rangle_\rho\times\rho|\cdot|^{-a+1/2}\times\langle 1/2,\cdots,a-3/2\rangle_\rho\times\pi'_1.$$

Comme $Jac_x\pi = 0$ pour $x \in]-1/2, -a+1/2]$, l'inclusion se factorise par

$$\pi \hookrightarrow \langle -1/2, \cdots, -a+1/2\rangle_\rho \times \langle 1/2, \cdots, a-3/2\rangle_\rho \times \pi'_1.$$

On vérifie que l'induite $\langle 1/2, \cdots, a-3/2\rangle_\rho \times \pi'_1$ a un unique sous-module irréductible, c'est la seule représentation dont le $Jac_{1/2,\cdots,a-3/2} \neq 0$. L'induite ci-dessus se factorise donc par ce sous-module (à cause de cette propriété du module de Jacquet). On peut caractériser ce sous-module irréductible; c'est essentiellement la propriété inverse de celle que l'on cherche à montrer en échangeant les rôles des deux copies de $SL(2,\mathbb{C})$ et en remplaçant a par $a-1$. Nos constructions sont symétriques en les deux copies de $SL(2,\mathbb{C})$ on peut donc caractériser le sous-module irréductible comme étant la représentation dans $\Pi(\psi'')$ correspondant aux paramètres donnés. Cela termine la preuve.

5.2. Un calcul approximatif de modules de Jacquet. La difficulté de la description de $\Pi(\psi)$ est qu'elle fait intervenir des calculs de modules de Jacquet qui sont difficiles à expliciter. On peut en trouver des approximations; on veut en fait généraliser (5), (7) et le lemme de **5.1**, ce qui sera réalisé en **5.3** et **5.4**. La situation typique dans laquelle on se trouvera est la suivante. On fixe ψ et un morphisme $\tilde{\psi}$ tel que $Jord(\psi)$ et $Jord(\tilde{\psi})$ sont égaux à un élément près qui vaut $(\rho, \alpha, 1)$ dans $Jord(\psi)$ et $(\rho, \alpha+2T, 1)$ dans $Jord(\tilde{\psi})$ avec $T > 0$ et il n'existe pas $(\rho, a, b) \in Jord(\psi)$ avec

$$\alpha < a-b+1 \leq a+b-1 < \alpha+2T.$$

En particulier on saura qu'il existe $\tilde{\pi} \in \Pi(\tilde{\psi})$ et $\pi \in \Pi(\psi)$ avec

$$\pi = Jac_{(\alpha-1)/2+T,\cdots,(\alpha+1)/2}\tilde{\pi}.$$

En général $\tilde{\pi}$ sera mieux connue que π comme sous-module irréductible d'une certaine induite et on veut déduire de cette connaissances des renseignements sur π, donc en fait montrer que π est aussi sous-module irréductible d'une certaine induite; les difficultés viennent de ce que l'on ne peut éliminer plusieurs choix pour l'induite et qu'il n'y a aucun moyen de démontrer que l'induite en question a un unique sous-module irréductible.

On fixe donc ψ, $\pi \in \Pi(\psi)$, $(\rho, a, 1) \in Jord(\psi)$, $\tilde{\psi}$, $\tilde{\pi} \in \Pi(\tilde{\psi})$, T comme ci-dessus, en particulier $\pi = Jac_{(\alpha-1)/2+T,\cdots,(\alpha+1)/2}\tilde{\pi}$. On suppose qu'il existe $\tilde{\psi}'$ un autre morphisme et $\tilde{\pi}' \in \Pi(\tilde{\psi}')$ tel que

$$\tilde{\pi} \hookrightarrow \times_{i\in[1,\ell]}\langle x_i, y_i\rangle_\rho \times \tilde{\pi}', \tag{1}$$

où les $[x_i, y_i]$ sont des segments décroissants avec $x_i \leq -y_i$, éventuellement $\ell = 0$ auquel cas il n'y a pas d'induite mais le point alors est que $\tilde{\psi}'$ peut être différent de $\tilde{\psi}$. On suppose que pour pour tout $i \in [1, \ell[$, soit $x_i > (\alpha-1)/2+T$ soit $x_i < (\alpha-1)/2$ et $-y_i \notin [(\alpha+1)/2, (\alpha-1)/2+T]$; en particulier, puisque $x_i \leq -y_i$, pour tout $x \in [(\alpha-1)/2+T, (\alpha+1)/2]$ l'induite $\langle x_i, y_i\rangle_\rho \times \rho|\cdot|^x$ est irréductible. On suppose que l'on a aussi $x_\ell \leq -y_\ell$.

On aura en plus que pour tout $(\rho, a', b') \in Jord(\tilde{\psi}')$ tel que $(a'-b')/2 \in [(\alpha-1)/2+T, (\alpha+1)/2]$, $b' = 1$ et $(\rho, a', 1)$ intervient avec multiplicité 1 dans

$Jord(\tilde{\psi}')$ et de plus si $x_\ell = -y_\ell$ alors $(\rho, 2x_\ell+1, 1) \notin Jord(\tilde{\psi}')$. On aura aussi dans les applications une hypothèse qui simplifie les démonstrations, alors on la fait: si $x_\ell = -y_\ell$ alors $x_\ell = (\alpha-1)/2+T$. Dans le cas où $x_\ell = -y_\ell$, on pourrait remplacer dans (1), $\langle x_i, y_i\rangle_\rho \times \tilde{\pi}'$ par une représentation $\tilde{\pi}'' \in \Pi(\tilde{\psi}'')$, où $\tilde{\psi}''$ se déduit de $\tilde{\psi}'$ en ajoutant deux fois $(\rho, 2x_\ell+1, 1)$; donc ce que l'on veut c'est une multiplicité inférieure ou égal à 2 pour les éléments de la forme $(\rho, a', 1)$ avec $(a'-1)/2 \in [(\alpha-1)/2+T, (\alpha+1)/2]$, avec multiplicité 2 uniquement éventuellement pour $(\rho, \alpha+2T, 1)$.

Les premiers facteurs $\times_{i\in[1,\ell[}\langle x_i, y_i\rangle_\rho$ jouent un rôle muet mais ils sont là dans les applications.

Lemme. *On suppose que $T=1$; $Jac_{(\alpha+1)/2}\tilde{\pi} \neq 0$ nécessite que l'une des trois hypothèses suivante soit réalisée (elles ne sont pas exclusives l'une de l'autre), $x_\ell = (\alpha+1)/2$, $-y_\ell = (\alpha+1)/2$, $(\rho, \alpha+2, 1) \in Jord(\tilde{\psi}')$. Et π vérifie alors l'une des inclusions ci-dessous:*

(i) $\pi \hookrightarrow \times_{i\in[1,\ell[}\langle x_i, y_i\rangle_\rho \times \langle x_\ell-1, y_\ell\rangle_\rho \times \tilde{\pi}'$, *ce cas nécessite que $x_\ell = (\alpha+1)/2$;*

(ii) $\pi \hookrightarrow \times_{i\in[1,\ell[}\langle x_i, y_i\rangle_\rho \times \pi''$, *où $\pi'' \in \Pi(\psi'')$ avec ψ'' qui se déduit de $\tilde{\psi}'$ en ajoutant $(\rho, 2x_\ell, 1)$ et $(\rho, 2x_\ell-1, 1)$, et ce cas nécessite $x_\ell = -y_\ell = (\alpha+1)/2$;*

(iii) $\pi \hookrightarrow \times_{i\in[1,\ell[}\langle x_i, y_i\rangle_\rho \times \langle x_\ell, y_\ell+1\rangle_\rho \times \tilde{\pi}'$, *ce cas nécessite* $-y_\ell = (\alpha+1)/2 > x_\ell$;

(iv) *si $(\rho, \alpha+2, 1) \in Jord(\tilde{\psi}')$, en notant $\tilde{\psi}''$ le morphisme qui se déduit de $\tilde{\psi}'$ en remplaçant $(\rho, \alpha+2, 1)$ par $(\rho, \alpha, 1)$, $\pi \hookrightarrow \times_{i\in[1,\ell]}\langle x_i, y_i\rangle_\rho \times \tilde{\pi}''$, avec $\tilde{\pi}'' \in \Pi(\tilde{\psi}'')$.*

Avant de faire la preuve on remarque que l'on voudra appliquer le lemme par induction pour obtenir le cas $T>1$; le lemme appliqué à $\pi_{T-1} := Jac_{(\alpha-1)/2+T}\tilde{\pi}$ montre que cette représentation vérifie à peu près les hypothèses nécessaires mais pas tout à fait; on ajoute tout de suite une hypothèse que l'on aura: si $x_\ell = -y_\ell$ alors $x_\ell = (\alpha-1)/2+T$. Pour la suite, il est utile de montrer tout de suite ce qu'il manque à π_{T-1} pour pouvoir lui réappliquer le lemme:

avec (i) et (ii), il n'y a aucun problème;

avec (iii), il manque si $x_\ell = -y_\ell - 1$ le fait que $(\rho, 2x_\ell+1, 1) \notin Jord(\tilde{\psi}')$; on vérifiera dans les applications que si (iii) se produit on n'a pas $x_\ell = -y_\ell - 1$;

avec (iv), il y a un problème si $(\rho, \alpha+2T-2, 1) \in Jord(\tilde{\psi}')$; dans ce cas, il faut changer ℓ en $\ell+1$, car on réalise dans ce cas $\tilde{\pi}''$ comme sous-module d'une induite de la forme $St(\rho, \alpha+2T-2) \times \pi''$ avec π'' dans le paquet qui se déduit de $\tilde{\psi}''$ en enlevant les deux copies de $(\rho, \alpha+2T-2, 1)$; donc il faut que le segment $[x_\ell, y_\ell]$ vérifie les hypothèses des segments $[x_i, y_i]$ pour $i \in [1, \ell[$. On vérifiera ce point dans les applications.

On montre maintenant le lemme. On applique évidemment les formules standard pour les modules de Jacquet. On obtient une filtration du module de Jacquet et par fonctorialité π est sous-module d'un des gradués et on ne sait évidemment pas lequel. Vues les hypothèses que l'on a mises, la filtration a au plus deux termes et on obtient directement que l'une des inclusions suivantes est réalisée:

soit celle de (i), soit celle de (iii) mais éventuellement avec $x_\ell = -y_\ell$, soit celle de (iv) avec $\tilde\pi'' := Jac_{(\alpha+1)/2}\tilde\pi$ et on sait que cette représentation est irréductible si non nulle (par hypothèse, pour tout $(\rho, a', b') \in Jord(\tilde{\psi}')$, $(a'-b')/2 = (\alpha+1)/2$ force $b' = 1$ et cet élément (ρ, a', b') n'intervient qu'avec mulitplicité 1 dans $Jord(\tilde{\psi}')$). Donc le seul point est de montrer que le cas de l'inclusion (iii) avec $x_\ell = -y_\ell$ est en fait (ii).

On suppose donc que $x_\ell = -y_\ell = (\alpha+1)/2$ et que

$$\pi \hookrightarrow \times_{i\in[1,\ell[}\langle x_i, y_i\rangle_\rho \times \langle(\alpha+1)/2, -(\alpha-1)/2\rangle_\rho \times \tilde\pi'. \tag{2}$$

On utilise l'inclusion $\langle(\alpha+1)/2, -(\alpha-1)/2\rangle_\rho \hookrightarrow \rho|\cdot|^{(\alpha+1)/2} \times St(\rho,\alpha)$. On sait que $St(\rho,\alpha)\times\tilde\pi'$ est semi-simple formé d'éléments dans le paquet associé à ψ' le morphisme qui se déduit de $\tilde\psi'$ en ajoutant deux copies de $(\rho,\alpha,1)$. Donc il existe π' dans $\Pi(\psi')$ tel que l'inclusion (2) donne en fait une inclusion

$$\pi \hookrightarrow \times_{i\in[1,\ell[}\langle x_i, y_i\rangle_\rho \times \rho|\cdot|^{(\alpha+1)/2} \times \pi'. \tag{3}$$

On peut remplacer dans l'induite de (3), la représentation $\rho|\cdot|^{(\alpha+1)/2}\times\pi'$ par un sous-quotient irréductible π'', d'où

$$\pi \hookrightarrow \times_{i\in[1,\ell[}\langle x_i, y_i\rangle_\rho \times \pi''. \tag{4}$$

et on va montrer que nécessairement π'' est dans $\Pi(\psi'')$ où ψ'' s'obtient comme dans l'énoncé de (ii). On commence par remarquer que les hypothèses sur les x_i, y_i pour $i\in[1,\ell[$ entraînent que dans (3), on peut pousser $\rho|\cdot|^{(\alpha+1)/2}$, en première position; d'où $Jac_{(\alpha+1)/2}\pi \neq 0$. Quand on reporte cette propriété dans (4), on voit que nécessairement $Jac_{(\alpha+1)/2}\pi'' \neq 0$ car aucun des x_i ou des $-y_i$ ne vaut $(\alpha+1)/2$ si $i\in[1,\ell[$. Or $Jac_{(\alpha+1)/2}$ appliqué à l'induite $\rho|\cdot|^{(\alpha+1)/2}\times\pi'$ est irréductible (égal à π') car $Jac_{(\alpha+1)/2}\pi' = 0$ puisque $Jord(\psi')$ ne contient aucun élément de la forme (ρ, a', b') avec $(a'-b')/2 = (\alpha+1)/2$ par hypothèse dans le cas où $x_\ell = -y_\ell$. Donc π'' est l'unique sous-module irréductible de l'induite $\rho|\cdot|^{(\alpha+1)/2}\times\pi'$. Or l'application $Jac_{(\alpha+1)/2}$ définit une surjection de $\Pi(\psi'')$ sur $\Pi(\psi')$ (cf. la remarque de 3); on fait remarquer au lecteur que la démonstration de ce fait utilise la formule des traces via les travaux d'Arthur et que je n'en connaît pas de démonstration uniquement à l'aide de modules de Jacquet; cela me semble donc un résultat non trivial. Ainsi l'élément $\tilde\pi''\in\Pi(\psi'')$ qui s'envoit sur π' est l'unique sous-module irréductible de l'induite $\rho|\cdot|(\alpha+1)/2\times\pi'$ et coïncide donc avec π''. Cela termine la preuve.

5.3. Description partielle de certaines représentations . En **5.1** (5), on a montré comment on pouvait remplacer $(\rho,a,b)\in Jord(\psi)$ tel que $a\geq b>1$ soit par $(\rho,a,b-2)$ soit par $\bigcup_{c\in[(a-b)+1,a+b-1];(-1)^c=(-1)^{a+b-1}}(\rho,c,1)$. Mais on avait une hypothèse forte que pour tout $(\rho,a',b')\in Jord(\psi)$, soit $(a'-b')/2\leq(a-b)/2$ soit $a'\gg b'$. Il faut lever cette hypothèse, mais on ne peut plus alors qu'espérer un résultat approximatif comme expliqué en **5.2**. C'est donc un résultat technique qui permet de démontrer des propriétés des représentations considérées mais ne permet pas de les construire.

On fixe ψ un morphisme et $(\rho,a,b)\in Jord(\psi)$. On suppose que pour tout $(\rho,a',b')\in Jord(\psi)$ vérifiant $(a'-b')/2\in](a-b)/2,(a+b)/2-1[$, $b'=1$ et qu'un tel élément n'intervient qu'avec multiplicité 1. On fixe un ordre sur $Jord(\psi)$ tel que les éléments de $Jord(\psi)$ strictement plus grands que (ρ,a,b) soient exactement les éléments $(\rho,a',b')\in Jord(\psi)$ avec $(a'-b')/2>(a-b)/2$. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des entiers a' tel que $(a'-1)/2\in](a-b)/2,(a+b)/2-1[$ et $(\rho,a',1)\in Jord(\psi)$. Soit $\pi\in\Pi(\psi)$; grâce à l'ordre mis sur $Jord(\psi)$, on définit les paramètres $\underline{t},\underline{\eta}$ qui permettent de construire π et on pose $t:=\underline{t}(\rho,a,b)$. On note ψ' le morphisme qui se déduit de ψ en remplaçant (ρ,a,b) par $(\rho,a,b-2)$.

Lemme. (i) *On suppose que* $t=0$. *Il existe* v *un entier positif ou nul, un morphisme* ψ'', $\pi''\in\Pi(\psi'')$ *et des élements* a_i *pour* $i\in[1,v]$ *de* $\mathcal{E}$ *rangés dans l'ordre décroissant avec l'inclusion suivante:*

si v *est pair* $\pi\hookrightarrow\times_{j\in[1,[v/2]]}\langle(a_{2j}-1)/2,-(a_{2j-1}-1)/2\rangle_\rho\times\pi''$, *où* ψ'' *s'obtient à partir de* ψ' *en ajoutant* $(\rho,a-b+1,1)$ *et* $(\rho,a+b-1,1)$ *et en enlevant tous les* $(\rho,a_j,1)$, *pour* $j\in[1,v]$; *si* $v=0$, *il n'y a pas d'induite, i.e.* $\pi=\pi''$;

si v *est impair*

$$\pi\hookrightarrow\times_{j\in[1,[v/2]]}\langle(a_{2j+1}-1)/2,-(a_{2j}-1)/2\rangle_\rho\times\langle(a_1-1)/2,-(a+b)/2+1\rangle_\rho,$$

où ψ'' *s'obtient à partir de* ψ' *en ajoutant* $(\rho,a-b+1,1)$ *et en enlevant tous les* $(\rho,a_j,1)$ *pour* $j\in[1,v]$.

(ii) *On suppose que* $t>0$. *Il existe* v *un entier positif ou nul, un morphisme* ψ'', $\pi''\in\Pi(\psi'')$ *et des élements* a_i *pour* $i\in[1,v]$ *de* $\mathcal{E}$ *rangés dans l'ordre décroissant avec l'inclusion suivante:*

si v *est impair*

$$\pi\hookrightarrow\langle(a-b)/2,-a_v\rangle_\rho\times_{j\in[1,[v/2]]}\langle(a_{2j}-1)/2,-(a_{2j-1}-1)/2\rangle_\rho\times\pi'',$$

où ψ'' *s'obtient à partir de* ψ' *en ajoutant* $(\rho,a+b-1,1)$ *et en enlevant tous les* $(\rho,a_j,1)$ *pour* $j\in[1,v]$;

si v *est pair* $\pi\hookrightarrow\langle(a-b)/2,-a_v\rangle_\rho\times$

$$\times_{j\in[1,v/2[}\langle(a_{2j+1}-1)/2,-(a_{2j}-1)/2\rangle_\rho\times\langle(a_1-1)/2,-(a+b)/2+1\rangle_\rho\times\pi'',$$

où ψ'' *s'obtient à partir de* ψ' *en enlevant tous les* $(\rho,a_j,1)$ *pour* $j\in[1,v]$; *si* $v=0$, *on a* $\pi\hookrightarrow\langle(a-b)/2,-(a+b)/2+1\rangle_\rho\times\pi''$.

On fixe un morphisme dominant ψ et plus précisément dominant tous les blocs de Jordan de ψ strictement supérieurs à (ρ,a,b) et contenant les autres. On le note $\tilde\psi$. On sait qu'il existe $\tilde\pi\in\Pi(\tilde\psi)$ tel que $\pi=Jac_{z\in\mathcal{Z}}\tilde\pi$ pour un ensemble totalement ordonné $\mathcal{Z}$ convenable. On fait d'abord remarquer que le lemme est vrai pour $\tilde\pi$ en prenant $v=0$ puisque $\mathcal{E}$ est vide et que l'on peut appliquer **5.1** (5). Le point est donc de faire redescendre les éléments de $Jord(\tilde\psi)$ qui dominent les éléments de $\mathcal{E}$; si on a le lemme pour cette représentation intermédiaire, avec $\tilde\pi''\in\Pi(\tilde\psi'')$, on peut ensuite faire redescendre les éléments restant et cela ne touche qu'à π'' pour passer de $\tilde\psi''$ à ψ'' sans modifier les inclusions. On peut donc supposer tout de suite que pour tout $(\rho,a',b')\in Jord(\psi)$ avec $(a'-b')/2\geq(a+b)/2-1$ on a en fait $(a'-b')/2\gg(a+b)/2-1$.

On fait la preuve de (i) et on suppose donc que $t=0$. On note $\tilde\psi_0$ le morphisme qui se déduit de $\tilde\psi$ en remplaçant (ρ,a,b) par $(\rho,a-b+1,1)$, $(\rho,a,b-2),(\rho,a+b-1,1)$. On note α le plus petit élément de $\mathcal{E}$; il existe $T\gg0$

tel que $(\rho, \alpha+2T, 1) \in Jord(\tilde{\psi}_0)$ et il faut d'abord calculer:

$$Jac_{(\alpha-1)/2+T,\cdots,(\alpha+1)/2}\tilde{\pi}.$$

On va appliquer **5.2** pour calculer d'abord $Jac_{(\alpha-1)/2+T,\cdots,(a+b)/2}\tilde{\pi}$; ici on a $\ell=0$ et à chaque fois seul (iv) peut se produire. Donc on obtient

$$Jac_{(\alpha-1)/2+T,\cdots,(a+b)/2}\tilde{\pi} \hookrightarrow \langle (a+b)/2-1, -(a+b)/2+1\rangle_\rho \times \pi''$$

pour $\pi'' \in \Pi(\psi'')$ qui se déduit de $\tilde{\psi}_0$ en enlevant $(\rho, \alpha+2T, 1)$ et $(\rho, a+b-1, 1)$. On applique encore $Jac_{(a+b)/2-1}$ en utilisant **5.2**; peuvent se produire (i) et (ii). Supposons que (ii) se produit, cela veut dire que le résultat est dans un paquet qui se déduit de $\tilde{\psi}_0$ en remplaçant simplement $(\rho, \alpha+2T, 1)$ par $(\rho, a+b-3, 1)$ et ensuite les Jac suivant ne peuvent plus que faire descendre $(\rho, a+b-3, 1)$ en $(\rho, \alpha, 1)$; en fait il ne s'est pas passé grand chose et on pourra recommencer avec l'élément de $\mathcal{E}$ juste au dessus de α. Par contre si le cas (i) se produit, la situation va changer; donc on peut considérer que α est le plus petit élément de $\mathcal{E}$ pour lequel dans la procédure précédente c'est le cas (i) qui se produit. Ici, on a donc

$$Jac_{(\alpha-1)/2+T,\cdots,(a+b)/2-1}\tilde{\pi} \hookrightarrow \langle (a+b)/2-3, -(a+b)/2+1\rangle_\rho \times \pi''.$$

Et les Jac suivant donnent encore uniquement le cas (i) et finalement on obtient

$$Jac_{(\alpha-1)/2+T,\cdots,(\alpha+1)/2}\tilde{\pi} \hookrightarrow \langle \alpha, -(a+b)/2+1\rangle_\rho \times \pi''. \qquad (1)$$

L'élément α qui est ici, sera le α_v de l'énoncé bien que l'on ne connaisse pas encore v. On note β l'élément de $\mathcal{E}$ qui est juste au dessus de α et on calcule pour T' grand tel que $(\rho, \beta+2T', 1) \in Jord(\tilde{\psi}_0)$, $Jac_{(\beta-1)/2+T',\cdots,(\beta+1)/2}$ du membre de gauche de (1); on commence par calculer $Jac_{(\beta-1)/2+T',\cdots,(a+b)/2}$ et seul (iv) peut se produire. Quand on continue avec $Jac_{(a+b)/2-1}$ soit (ii) soit (iv) se produit et comme ci-dessus, il ne se passe ensuite plus rien, c'est toujours (iv) qui seul peut s'appliquer et le résultat est simplement de faire descendre $(\rho, \beta+2T', 1)$ en $(\rho, \beta, 1)$; comme ci-dessus, on ne s'intéresse donc qu'au premier β pour lequel c'est (ii) qui se produit. Et on trouve

$$Jac_{(\beta-1)/2+T',\cdots,(\beta+1)/2}Jac_{(\alpha-1)/2+T,\cdots,(\alpha+1)/2}\tilde{\pi} \hookrightarrow \langle \alpha, -(\beta-1)/2\rangle_\rho \times \pi''',$$

où π''' se trouve dans le morphisme qui se déduit de $\tilde{\psi}_0$ en gardant $(\rho, a+b-1, 1)$ et en enlevant $(\rho, \alpha+2T, 1)$ et $(\rho, \beta+2T, 1)$. On remarque que pour tout $\gamma \in \mathcal{E}$ qui doit encore redescendre, on a certainement $(\gamma-1)/2 > (\beta-1)/2 > (\alpha-1)/2$. Le facteur $\langle \alpha, -(\beta-1)/2\rangle_\rho$ joue le rôle muet comme voulu dans **5.2** et on est revenu à la situation où on faisait redescendre α; il est alors facile de finir la preuve du lemme (par exemple par récurrence sur $|\mathcal{E}|$). Cela termine la preuve de (i).

Preuve de (ii); on sait dès le départ que l'on a une inclusion

$$\tilde{\pi} \hookrightarrow \langle (a-b)/2, \cdots, -(a+b)/2+1\rangle_\rho \times \tilde{\pi}'.$$

C'est donc la preuve de (i) qui s'applique telle quelle mais en commençant au cas β. Cela termine la preuve du lemme.

5.4. Le cas des blocs négatifs . On fixe ψ et on suppose que pour tout $(\rho, a, b) \in Jord(\psi)$ tel que $a \geq b$, on a $b = 1$ et qu'un tel élément n'intervient qu'avec multiplicité 1. On note (ρ, a, b) un élément de $Jord(\psi)$ tel que $(b-a)/2 > 0$ et minimal avec cette propriété. On fixe $\pi \in \Pi(\psi)$ et on suppose que si $a = b+1$, $\pi \notin \Pi(\tilde{\psi})$ où $\tilde{\psi}$ s'obtient en changeant uniquement (ρ, a, b) en (ρ, b, a). On fixe un ordre sur $Jord(\psi)$ tel que (ρ, a, b) soit le plus petit élément. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des éléments de $Jord(\psi)$ de la forme $(\rho, a', 1)$ avec $a' \in [(b-a)-1, a+b-1[$.

Lemme. *Il existe un entier v positif ou nul, des éléments de $\mathcal{E}$, a_i pour $i \in [1, v]$ rangés dans l'ordre décroissant, un morphisme ψ'' et $\pi'' \in \Pi(\psi'')$, avec une inclusion*

$$\pi \hookrightarrow \langle (a-b)/2, \cdots, -(a_v - 1)/2 \rangle_\rho \times_{j \in [1,v[; j \equiv v[2]} \langle (a_{j+1}-1)/2, -(a_j - 1)/2 \rangle_\rho$$
$$\times \begin{cases} \langle (a_1 - 1)/2, -(a+b)/1 + 1 \rangle_\rho \times \pi''; & si\ v\ est\ pair, \\ \times \pi'', & si\ v\ est\ impair, \end{cases}$$

où ψ'' s'obtient à partir de ψ en remplaçant (ρ, a, b) par $(\rho, a, b-2)$ et en enlevant les $(\rho, a_i, 1)$ pour $i \in [1, v]$ et en ajoutant $(\rho, a+b-1, 1)$ si v est impair; le terme $\langle (a-b)/2, -(a_1 - 1)/2 \rangle_\rho$ disparaît si $a_1 = b-a-1$ et si $v = 0$, on n'a que le terme $\langle (a-b)/2, -(a+b)/2 + 1 \rangle_\rho$.

D'abord on remarque qu'il suffit de démontrer le lemme avec l'hypothèse supplémentaire que pour tout $(\rho, a', b') \in Jord(\psi)$ si $(\rho, a', b') \notin \{(\rho, a, b), (\rho, a'', 1);$ $a'' < (a+b-1)\}$ alors $|(a'-b')| \gg 0$. En effet, on met un ordre sur $Jord(\psi)$ de telle sorte que ces éléments sont strictement plus grands que (ρ, a, b) et tout $(\rho, a'', 1)$ avec $a'' < (a+b-1)$; on considère un morphisme qui domine ψ et plus précisément qui domine tous ces $(\rho, a', b') \in Jord(\psi)$ et au contraire contient (ρ, a, b) et $(\rho, a'', 1)$ pour tout $a'' \in \mathcal{E}$. On sait qu'il existe $\tilde{\pi}$ dans le paquet associé à ce morphisme tel que

$$\pi = Jac_{y \in \mathcal{Y}} \tilde{\pi},$$

où les éléments de $\mathcal{Y}$ sont soit négatifs strictement plus petits que $(a-b)/2$ soit positifs strictement plus grands que $(a+b)/2 - 1$. Donc prendre ce module de Jacquet ne perturbe pas les inclusions du lemme si on les connaît pour $\tilde{\pi}$, le module de Jacquet ne s'applique qu'à l'analogue de π''; ici on a remplacé (ρ, a, b) par $(\rho, a, b-2)$; il faut vérifier que cet élément peut toujours être le plus petit élément pour un bon ordre. Pour cela on utilise la minimalité de $(b-a)/2$; on a maintenant soit $(a-b+2)/2 = 1/2$ soit $(b-2-a)/2$ est le plus petit des $(b'-a')/2$ parmi ceux qui sont négatifs. D'où l'assertion. Ainsi quand on applique $Jac_{y \in \mathcal{Y}}$ à l'analogue de π'' on obtient un π'' convenable. Démontrons donc le lemme avec cette hypothèse supplémentaire. On fixe $\psi_\gg$ dominant ψ et il faut uniquement faire redescendre les éléments de $Jord(\psi_\gg)$ dominant les $(\rho, a'', 1)$ avec $a'' < a+b-1$. Au départ on sait qu'il existe une représentation $\pi_\gg$ telle que

$$\pi = \circ_{a''} Jac_{(a''-1)/2 + T_{a''}, \cdots, (a''+1)/2} \pi_\gg,$$

où a'' parcourt les entiers tels que $(\rho, a'', 1) \in Jord(\psi)$ et $a'' < a+b-1$ et où les $T_{a''}$ sont des entiers tels que $T_{a''} \gg T_{a'''}$ si $a'' > a'''$; et dans cette formule, on considère les éléments de $\mathcal{E}$ dans l'ordre croissant.

De plus on note $\psi_{\gg,-}$ le morphisme qui se déduit de $\psi_{\gg}$ en remplaçant (ρ,a,b) par $(\rho,a,b-2)$ et on sait (cf. (7) et le lemme de **5.1**) qu'il existe $\pi_{\gg,-}\in\Pi(\psi_{\gg,-})$ avec une inclusion

$$\pi_{\gg}\hookrightarrow\langle(a-b)/2,\cdots,-(a+b)/2+1\rangle_\rho\times\pi_{\gg,-}.$$

On fait d'abord descendre les éléments qui dominent les $(\rho,a'',1)$ avec $a''<a-b-1$. Ici il n'y a pas d'autres solutions que d'appliquer le module de Jacquet à $\pi_{\gg,-}$: a priori quand on calcule $Jac_{z\in[(a''-1)/2+T_{a''},(a''+1)/2]}$ a une induite comme ci-dessus, le segment se coupe en deux, une partie sert à prendre le module de Jacquet de $\pi_{\gg,-}$ et l'autre s'applique à $\langle(a-b)/2,\cdots,-(a+b)/2+1\rangle_\rho$ et à son dual. Le découpage se fait nécessairement en deuxsous-intervalle et le sous-intervalle qui s'applique à $\pi_{\gg,-}$ commence nécessairement à $(a''-1)/2+T_{a''}$. Puisque $(a''+1)/2<-(a-b)/2$ ce sous-intervalle contient aussi $(a''+1)/2$ et coïncide donc avec tout l'intervalle. Ceci règle facilement les éléments $(\rho,a'',1)$ avec a'' non dans $\mathcal{E}$; on ne change pas les notations, $\pi_{\gg}$ et $\pi_{\gg,-}$ alors qu'il le faudrait. On considère maintenant les éléments dans $\mathcal{E}$ et on est exactement dans la situation de **5.3** (ii), le fait que $(a-b)/2$ est négatif au lieu d'être positif n'a qu'un seul effet: le premier terme $\langle(a-b)/2,-(a_1-1)/2\rangle_\rho$ disparaît si $a_1=b-a-1$. Cela termine la preuve.

5.5. Une remarque sur les orbites unipotentes . On considère un entier v et des $a_i\in]a-b+1,a+b-1[$ pour $i\in[1,v]$; on considère l'orbite unipotente, O_v dont les blocs de Jordan sont $(a-b+1)$ et deux copies de chacun des $(a_j+a_{j+1})/2$ pour j de la parité de $v-1$ auquel on ajoute encore $(a+b-1)$ si v est pair et deux copies de $(a+b-1+a_1)/2$ si v est impair.

Lemme. *L'orbite O_v ainsi décrite contient dans sa fermeture l'orbite dont les blocs de Jordan sont deux copies de a et tous les a_j pour $j\in[1,v]$.*

Pour tout $t\in[1,v+2]$ on compare la somme des t plus grands blocs de Jordan. On commence par $t=1$. On a clairement $a+b-1\geq a$ car $b\geq 1$ et $a+b-1>a_1$ par hypothèse, ; d'où $a+b-1\geq\sup(a,a_1)$, ce qui règle le cas où $t=1$ et v est pair. Mais on a aussi $((a+b-1+a_1)/2\geq a_1$ et comme $a_1>a-b+1$, $((a+b-1+a_1)/2\geq((a+b-1+a-b+1)/2=a$, ce qui règle le cas où $t=1$ et v est impair.

Le cas $t=v+2$ est simplement le fait que les orbites sont relatives au même groupe et le cas $t=v+1$ revient à comparer les derniers blocs de Jordan (chaque orbite en a le même nombre); on vérifie que $a-b+1\leq\inf(a,a_v)$ presque par hypothèse.

On suppose donc que $t\in]1,v]$. Si t est de la parité de v, la somme des t plus grands blocs de Jordan de O_v vaut

$$a+b-1+\sum_{j\leq t-2}a_j+(a_{t-1}+a_t)/2$$

et on doit comparer avec $\sum_{j\leq t-2}a_j+\sup(a_{t-1},a)+\sup(a_t,a)$. La différence de ces deux nombres vaut $\big((a+b-1+a_{t-1})/2-\sup(a,a_{t-1})\big)+\big((a+b-1+a_t)/2-\sup(a,a_t)\big)$

et chacune des parenthèses est positive. Si t est de la parité opposée à celle de v, la somme des t plus grands blocs de Jordan de O_v vaut $a+b-1+\sum_{j\leq t-1} a_j$ que l'on doit comparer à $\sum_{j\leq t-2} a_j+\sup(a_{t-1},a)+\sup(a_t,a)$. La différence de ces deux nombres vaut $\big((a+b-1+a_{t-1})/2-\sup(a,a_{t-1})\big)+\big((a+b-1+a_{t-1})/2-\sup(a,a_t)\big)$ et chacune des parenthèses est positive car $a_{t-1}>a_t$. Cela termine la preuve.

On a un lemme analogue pour le (ii) de **5.3**. On considère l'orbite dont les blocs de Jordan sont deux copies de $(a-b+1+a_v)/2$ ainsi que des $(a_j+a_{j+1})/2$ pour j de la parité de v auquel on ajoute, si v est pair, deux copies de $(a+b-1+a_1)/2$ et si v est impair une copie de $a+b-1$. On note O' cette orbite.

Lemme. *L'orbite O' contient dans sa fermeture l'orbite O, dont les blocs de Jordan sont les a_j pour $j\in[1,v]$ auxquels on ajoute deux copies de a.*

Le plus grand bloc de Jordan de O' est soit $a+b-1$ soit $(a+b-1+a_1)/2$; dans les deux cas ce bloc est supérieur (d'ailleurs strictement) à $\sup(a,a_1)$. Le plus petit bloc de Jordan de O' vaut $(a-b+1+a_v)/2$; ceci est inférieur à a_v car $a-b+1<a_v$. Comme $a_v<a+b-1$ ceci est aussi inférieur à a. On a donc montré que le plus grand bloc de O' est supérieur au plus grand bloc de O et la même assertion pour la somme des $v+1$ plus grands blocs de chacune de ses orbites. Il faut ensuite faire la même comparaison pour tout $t\in[2,v]$; supposons t de la parité de v. Il faut calculer le signe de

$$a+b-1+\sum_{i<t} a_i-\sum_{i<t-1} a_i-\sup(a_{t-1},a)-\sup(a_t,a)$$

$$=a+b-1+a_{t-1}-\sup(a,a_{t-1})-\sup(a,a_t)>0$$

par un calcul déjà fait. Si t est de la parité opposée à v, il faut calculer le signe de

$$a+b-1+\sum_{i<t-1} a_i+(a_{t-1}+a_t)/2-\sum_{i<t-1} a_i-\sup(a_{t-1},a)-\sup(a_t,a)$$

$$=((a+b-1+a_{t-1})/2-\sup(a,a_{t-1})+((a+b-1+a_t)/2-\sup(a,a_t))>0$$

par un calcul déjà fait. Cela termine la preuve.

On a encore un lemme analogue pour **5.4**. On reprend les hypothèses de cette référence. On note O' l'orbite dont les blocs de Jordan sont deux copies de $(a_1-(b-a-1))/2$, deux copies des $(a_j+a_{j+1})/2$ pour $j\in[1,v]$ de la parité de v et si v est pair, deux copies de $(a+b-1+a_1)/2$ tandis que si v est impair une copie de $a+b-1$. On note O l'orbite dont les blocs de Jordan sont deux copies de a et chaque a_j pour $j\in[1,v]$

Lemme. *L'orbite O' contient dans sa fermeture l'orbite O.*

On compare d'abord le plus grand bloc de Jordan de chacune de ces orbites; si v est pair, $(a+b-1+a_1)/2>a_1$ puisque $a+b-1>a_1$. De plus $a_1\geq b-a-1$, d'où $(a+b-1+a_1)/2 \geq b-1 \geq a$ car $b-a>0$ par hypothèse. Si v est impair, on a clairement $a+b-1 > \sup(a,a_1)$. L'orbite O a $v+2$ blocs de Jordan et O' aussi sauf si $a_1 = b-a-1$ où elle en a un de moins. Le $v+2$-ième bloc de Jordan de O est $\inf(a,a_1)$; celui de O' est $(a_1-(b-a-1))/2$. Or $(a_1-(b-a-1))/2 < (a+b-1-(b-a-1))/2 = a$ et est aussi inférieur à a_1; donc la somme des $v+1$ plus grands blocs de Jordan de O' est plus grande que son analogue pour O. Soit $j \in]1,v]$, il faut comparer la somme des j plus grands blocs de Jordan pour O' à la somme analogue pour O. On suppose d'abord que j est de la parité de v; on doit calculer le signe de

$$a+b-1+\sum_{k<j} a_k - \sum_{k<j-1} a_k - \sup(a,a_{j-1}) - \sup(a,a_j)$$
$$= a+b-1+a_{j-1} - \sup(a,a_{j-1}) - \sup(a,a_j)$$
$$= ((a+b-1+a_{j-1})/2 - \sup(a,a_{j-1})) - ((a+b-1+a_{j-1})/2 - \sup(a,a_j))$$

et chaque parenthèse est positive par l'argument déjà donné pour la première et le même en tenant compte de $a_{j-1} > a_j$ pour la deuxième. On suppose maintenant que j est de la parité opposé à v, on doit alors calculer le signe de:

$$a+b-1+\sum_{k<j-1} a_k + (a_{j-1}+a_j)/2 - \sum_{k<j-1} a_k - \sup(a,a_{j-1}) - \sup(a,a_j)$$
$$= ((a+b-1+a_{j-1})/2 - \sup(a,a_{j-1})) - ((a+b-1+a_j)/2 - \sup(a,a_j))$$

est encore positif. Et cela termine la preuve.

6. Comparaison des paramétrisations de Langlands

6.1. Définition des orbites unipotentes à la Langlands. Soit π une représentation irréductible et on considère sa paramétrisation de Langlands. D'abord d'un point de vue théorique, à π on associe entre autre un morphisme ϕ_π de $W_F \times SL(2,\mathbb{C})$ dans le L-groupe de G que l'on voit comme une représentation de $W_F \times SL(2,\mathbb{C})$ dans $GL(m_G^*,\mathbb{C})$ comme expliqué dans l'introduction. L'orbite de Langlands associée à π est celle qui est définie par la restriction de cette représentation à $SL(2,\mathbb{C})$.

On va récrire cela en termes combinatoires de façon à pouvoir, si ce n'est la calculer, du moins l'approximer.

La paramétrisation combinatoire de Langlands associe à π un sous-groupe parabolique (standard) et une représentation tempérée de ce sous-groupe parabolique tordue négativement, telle que π soit un sous-module de l'induite. Etant donnée la forme très particulière des sous-groupes paraboliques des groupes considérés, les données combinatoires associées à la paramétrisation de Langlands de π sont: une représentation tempérée irréductible d'un groupe de même type que G mais de rang plus petit, notée π_{temp} et une collection de représentations de Steinberg généralisées $St(\rho',a')$ tordues par un caractère de la forme $|\cdot|^{-x'}$ avec $x' \in \mathbb{R}_{>0}$ tels que

$$\pi \hookrightarrow \left(\times_{(\rho,',a',x') \in \mathcal{L}(\pi)} St(\rho',a') |\cdot|^{-x'} \right) \times \pi_{temp} (*)$$

où $\mathcal{L}(\pi)$ est totalement ordonné de sorte que les x' arrivent de façon décroissante au sens large; ici les ρ' sont des représentations cuspidales unitaires, les a' sont des entiers. Une telle écriture n'est peut être pas telle quelle dans la littérature, voilà donc comment on la démontre: on fixe une telle inclusion avec aucune hypothèse sur les x' sauf que le premier est positif ce qui est évidemment possible si π n'est pas égal à π_{temp}; en utilisant simplement les propriétés des induites dans $GL(n)$ on s'arrange pour que les x' arrivent dans l'ordre décroissant: pour cela on rappelle que si $[d,f]$, $[d',f']$ sont des segments décroissants tel que le milieu de $[d,f]$ est supérieur au milieu de $[d',f']$, les sous-quotients de l'induite $[d,f]_\rho \times [d',f']_\rho$ sont le sous-module irréductible de l'induite écrite dans l'autre sens et, si les segments sont liés, le sous-module irréductible de l'induite

$$[d,f']_\rho \times [d',f]_\rho \simeq [d',f]_\rho \times [d,f']_\rho.$$

Dans ce dernier cas, on remarque que les segments $[d',f]$ et $[d,f']$ ne sont plus liés et que leurs milieus sont strictement inférieurs au milieu de $[d,f]$ (le segment $[d,f']$ n'intervient pas si $d'=f-1$); pour la suite il est utile de remarquer que si le milieu de $[d,f]$ est négatif, cela est aussi vrai pour $[d',f]$ et $[d,f]$. Dans les 2 cas, on a donc amélioré la situation en gardant le fait que le milieu du premier segment n'a pas augmenté et que la somme des milieux n'a pas augmenté. On obtient donc l'assertion de décroissance de proche en proche.

On montre que tous les x' peuvent être pris positifs: puisque l'on a déjà ordonné de façon décroissante, on considère $\tau := \times_{(\rho',a',x');x'\leq 0} St(\rho',a')|\cdot|^{-x'} \times \pi_{temp}$ et l'inclusion (*) se factorise par un sous-quotient irréductible de τ, c'est-à-dire qu'il existe un sous-quotient irréductible τ' de τ et une inclusion:

$$\pi \hookrightarrow \left(\times_{(\rho,',a',x')\in\mathcal{L}(\pi);x'>0} St(\rho',a')|\cdot|^{-x'} \right) \times \tau'.$$

On applique à τ' l'assertion (on est nécessairement dans un groupe de rang plus petit) et on réordonne comme ci-dessus; on garde la positivité des exposants et on obtient l'ordre décroissant. D'où l'existence d'un inclusion (*) avec les propriétés voulues; l'unicité est alors claire car cette inclusion est une inclusion de Langlands moyennant le fait qu'il faut regrouper entre elles les représentations de Steinberg avec la même torsion.

Les données sont donc uniques à l'ordre près, les modifications de l'ordre viennent des irréductibilités des induites pour le groupe linéaire convenable de la forme $St(\rho',a')|\cdot|^{-x'} \times St(\rho'',a'')|\cdot|^{-x''}$ pour $x'=x''$. On associe à π_{temp} son paquet tempéré, ψ_{temp}; c'est-à-dire que ψ_{temp} est un morphisme comme ceux considérés ici pour un groupe de même type que G, trivial sur la 2e copie de $SL(2,\mathbb{C})$ et tel que $\pi_{temp} \in \Pi(\psi_{temp})$.

Fixons ρ une représentation cuspidale unitaire; on définit l'orbite unipotente $O_{\rho,\pi}$ comme une orbite d'un groupe linéaire convenable ayant comme ensemble de blocs de Jordan deux copies de chaque $\bigcup_{(\rho',a',x')\in\mathcal{L}(\pi);\rho'=\rho} a'$ avec la multiplicité éventuelle dans $\mathcal{L}(\pi)$, auxquels on ajoute $\bigcup_{(\rho',a,1)\in Jord(\psi_{temp});\rho\simeq\rho'} a$, là aussi en tenant compte des multiplicités éventuelles.

Soient ψ un morphisme et ρ comme ci-dessus. On note $O_{\psi,\rho}$ l'orbite unipotente du GL convenable dont les blocs de Jordan sont exactement

$$\bigcup_{(\rho,a,b)\in Jord(\psi)} \underbrace{(a,\cdots,a)}_{b}.$$

Remarque. *Soit ψ un morphisme et on suppose que $\pi \in \Pi(\psi_L)$. Soit ρ une représentation cuspidale unitaire; alors $O_{\pi,\rho} = O_{\psi,\rho}$.*

On a décrit les paramètres de Langlands des éléments de $\Pi(\psi_L)$ dans 1. La remarque s'en déduit immédiatement.

6.2. Orbites de Langlands et induction.

On fixe une représentation irréductible π de G et une représentation induite de G de la forme $\left(\times_{i\in\mathcal{I}} St(\rho_i, a_i)|\cdot|^{-x_i}\right) \times \pi_{temp}$ où $\mathcal{I}$ est un ensemble d'indices totalement ordonné et pour tout $i \in \mathcal{I}$, ρ_i est une représentation cuspidale unitaire, a_i est un entier et x_i un réel positif ou nul et où π' est une représentation irréductible. On suppose que

$$\pi \hookrightarrow \times_{i\in\mathcal{I}} St(\rho_i, a_i)|\cdot|^{-x_i} \times \pi'. \tag{1}$$

Lemme. *Avec les notations et hypothèses précédentes, pour toute représentation cuspidale ρ unitaire irréductible d'un groupe linéaire, l'orbite unipotente $\mathcal{O}_{\pi,\rho}$ contient dans sa fermeture l'orbite unipotente du groupe linéaire convenable dont les blocs de Jordan sont précisément l'union des blocs de Jordan de $\mathcal{O}_{\pi',\rho}$ avec $\{(a_i, a_i), i \in \mathcal{I}; \rho_i \simeq \rho\}$.*

On remarque que pour prouver le lemme, on peut tout à fait supposer que π' est tempérée; si ceci n'est pas vrai on remplace π' par l'induite qui donne sa paramétrisation de Langlands. On suppose donc que π' est tempérée.

On fixe ρ comme dans l'énoncé et on note $\mathcal{O}_{ind,\rho}$ l'orbite unipotente dont les blocs de Jordan sont l'union de ceux de $\mathcal{O}_{\pi',\rho}$ avec les (a_i, a_i) pour tout $i \in \mathcal{I}$ tel que $\rho_i \simeq \rho$. On a $\mathcal{O}_{\pi,\rho} = \mathcal{O}_{ind,\rho}$ si pour tout $i, j \in \mathcal{I}$ tel que $i < j$ et $\rho_i \simeq \rho_j \simeq \rho$, $x_i > x_j$. Si ces inégalités ne sont pas vérifiées, il faut échanger des facteurs, éventuellement en les modifiant pour passer de l'inclusion donnée en une inclusion comme sous-module de Langlands: ceci se fait par étapes élémentaires; on doit modifier la situation de deux facteurs consécutifs $St(\rho, a_i)|\cdot|^{-x_i} \times St(\rho, a_{i+1})|\cdot|^{-x_{i+1}}$ si $x_i < x_{i+1}$. Deux cas sont alors possibles, soit on peut simplement échanger les deux facteurs de l'induite en gardant l'inclusion de π dans cette nouvelle induite soit il faut remplacer $St(\rho, a_i)|\cdot|^{-x_i} \times St(\rho, a_{i+1})|\cdot|^{-x_{i+1}}$ par son sous-module irréductible. Et le premier cas se produit sauf éventuellement si les segments $[(a_i - 1)/2 - x_i, -(a_i - 1)/2 - x_i]$ et $[(a_{i+1} - 1)/2 - x_{i+1}, -(a_{i+1} - 1)/2 - x_{i+1}]$ sont liés au sens de Zelevinski.

Explicitons ce cas: le premier segment est un segment de centre $-x_i$ et le deuxième est de centre $-x_{i+1}$; l'hypothèse $x_{i+1} > x_i$, entraîne que les segments sont liés si

$$(a_i - 1)/2 - x_i > (a_{i+1} - 1)/2 - x_{i+1} \geq -(a_i - 1)/2 - x_i - 1 > -(a_{i+1} - 1)/2 - x_{i+1} - 1.$$

Le sous-module irréductible est l'induite irréductible $St(\rho,\alpha)|\cdot|^{-x'} \times St(\rho,\beta)|\cdot|^{-x''}$ avec

$$(\alpha-1)/2 - x' = (a_i-1)/2 - x_i; -(\alpha-1)/2 - x' = -(a_{i+1}-1)/2 - x_{i+1},$$

$$(\beta-1)/2 - x'' = (a_{i+1}-1)/2 - x_{i+1}; -(\beta-1)/2 - x' = -(a_i-1)/2 - x_i,$$

et $\beta = 0$ si $(a_{i+1}-1)/2 - x_{i+1} = -(a_i-1)/2 - x_i - 1$. Dans tous les cas $\alpha \geq sup(a_i, a_{i+1})$ et $\beta + \alpha = a_i + a_{i+1}$. De plus x' et x'' sont des réels; montrons qu'ils sont strictement compris entre x_i et x_{i+1}; on peut le voir en interprétant $-x'$ et $-x''$ comme des milieux de segments et on voit alors tout de suite que $x_i \leq x', x'' \leq x_{i+1}$. Par le calcul, on obtient:

$$-2x' = (a_i-1)/2 - x_i - (a_{i+1}-1)/2 - x_{i+1}$$

$$= -2x_i + (a_i-1)/2 + x_i - (a_{i+1}-1)/2 - x_{i+1} < -2x_i,$$

car $-(a_{i+1}-1)/2 - x_{i+1} < -(a_i-1)/2 - x_i$, (cf. ci-dessus). De même

$$-2x'' = (a_{i+1}-1)/2 - x_{i+1} - (a_i-1)/2 - x_i$$

$$= -2x_i + ((a_{i+1}-1)/2 - x_{i+1}) - ((a_i-1)/2 - x_i) < -2x_i.$$

On remarque que $-2(x'+x'') = -2(x_i + x_{i+1})$, d'où, ce qui nous servira plus loin:

$$x' + x'' = x_i + x_{i+1} \text{ et } \sup(x', x'') \leq x_{i+1}, \tag{1}$$

puisque l'on a montré que $x_i \leq \sup(x', x'')$.

Finalement on obtient une inclusion de π dans une induite qui est meilleure au sens que l'on se rapproche d'une inclusion de Langlands: pour cela il faut donner un nombre sur lequel faire une récurrence. On fait en fait une double récurrence, d'abord sur $|\mathcal{I}|$ puis sur

$inv(ind) := |\{(i,j); i < j, \rho_i \simeq \rho_j, x_i < x_j$, et les segments associés à $St(\rho_i, a_i)|\cdot|^{-x_i}$ et $St(\rho_j, a_j)|\cdot|^{-x_j}$ sont liés $\}|$.

L'initialisation de la récurrence est évidente. Il est aussi clair que si π est un sous-module de l'analogue de l'induite (1) mais où on a échangé deux facteurs consécutifs comme ci-dessus avec $x_i < x_{i+1}$, on a amélioré la récurrence. On suppose donc que π est un sous-module de l'analogue de l'induite (1) mais où on a remplacé deux facteurs consécutifs associés à des segments liés par leur sous-module irréductible comme décrit ci-dessus; on reprend les notations déjà introduites et on montre que l'on améliore aussi la récurrence. On a à considérer uniquement le cas où $\beta \neq 0$ dans les notations ci-dessus. Supposons cela; on transforme les notations déjà introduites pour mieux voir les liaisons de segment. Pour tout $j \in \mathcal{I}$, on note $[d_j, f_j]$ le segment associé à la représentation

$$St(\rho_j, a_j)|\cdot|^{-x_j} \text{ pour tout } j \in \mathcal{I},$$

c'est-à-dire, $d_j = (\alpha_j - 1)/2 - x_j$ et $f_j = -(\alpha_j-1)/2 - x_j$. Avec ces notations pour $j = i$ ou $i+1$, puisque $\beta \neq 0$, $d_i > d_{i+1} \geq f_i > f_{i+1}$. Et les segments associés aux nouvelles représentations sont $[d_i, f_{i+1}]$ et $[d_{i+1}, f_i]$. On fait un dessin en considérant que la décroissance se fait de gauche à droite. On a

$$\begin{array}{cccccccccc} d_i & & f_i & & & d_i & & & f_{i+1} \\ & d_{i+1} & & f_{i+1} & & & d_{i+1} & f_i & \end{array}$$

En particulier le couple $(i, i+1)$ qui contribuait à $inv(ind)$ n'y contribue plus. Soit $j \in \mathcal{I}$ et supposons d'abord que $j < i$. Si $d_j \leq d_{i+1}$, il n'y a pas de liaisons telles qu'on les cherche avec les nouveaux segments. Si $d_j \in [d_i, d_{i+1}[$, on a une liaison seulement si $f_j \in [d_{i+1}+1, f_i[$ et uniquement avec le segment $[d_{i+1}, f_i]$; dans ce cas, on a aussi une liaison avec le segment $[d_{i+1}, f_{i+1}]$. On suppose maintenant que $d_j < d_i$; si $f_j \leq f_{j+1}$, il n'y a aucune liaison. Si $f_j \in [f_i, f_{i+1}[$ on a une liaison avec le segment $[d_i, f_{i+1}]$ et une avec le segment $[d_{i+1}, f_{i+1}]$. Si $f_j \in [d_{i+1}+1, f_i[$ on a une liaison avec les quatre segments écrits et si $f_j \in [d_i+1, d_{i+1}+1[$, on a une liaison avec les segments $[d_i, f_{i+1}]$ et $[d_i, f_i]$. En d'autres termes on n'a pas augmenté la contribution de $[d_j, f_j]$ à $inv(ind)$.

Il faut aussi regarder le cas où $j > i+1$ qui est analogue. Ainsi on a amélioré la récurrence.

Il reste à suivre les orbites unipotentes associées à la représentation induite. Dans le cas d'échange de deux facteurs consécutifs, on ne change pas l'orbite unipotente associée à l'induite. Dans l'autre cas, on remplace $(a_i, a_i, a_{i+1}, a_{i+1})$ par $(\alpha, \alpha, \beta, \beta)$. La nouvelle orbite contient la première dans sa fermeture car $\alpha > \sup(a_i, a_{i+1})$ et $\alpha + \beta = a_i + a_{i+1}$. L'hypothèse de récurrence donne alors le lemme.

6.3. Comparaison des orbites de Langlands à l'intérieur d'un paquet d'Arthur.

Théorème. *On fixe un morphisme ψ et $\pi \in \Pi(\psi)$, une représentation irréductible dans le paquet associé à ψ. Soit ρ une représentation cuspidale unitaire; l'orbite $O_{\psi,\rho}$ est une orbite du même groupe linéaire que l'orbite $O_{\psi,\rho}$ (c'est-à-dire $\sum_{(\rho',a',b');\rho\simeq\rho} a'b'$). Et l'orbite $O_{\psi,\rho}$ est incluse dans la fermeture de l'orbite $O_{\pi,\rho}$.*

On démontre le théorème par récurrence sur $\ell(\psi) := \sum_{(\rho,a,b)\in Jord(\psi)}(b-1)$. Si $\ell(\psi) = 0$, ψ n'est pas nécessairement tempérée à cause de $(\rho', a', b') \in Jord(\psi)$ avec $\rho \not\simeq \rho'$ mais les constructions des représentations ramènent aisément au cas tempéré où il n'y a rien à démontrer.

On suppose donc que $\ell(\psi) > 0$. On traite d'abord le cas où il existe $(\rho, a, b) \in Jord(\psi)$ avec $a \geq b > 1$. On fixe un tel triplet en supposant $(a-b)/2$ maximum avec ces propriétés. On utilise **5.3** pour écrire $\pi \hookrightarrow \delta \times \pi''$ avec δ et π'' précisés en loc.cite. Le lemme de **6.2** montre que $O_{\pi,\rho}$ contient dans sa fermeture l'orbite associée en loc. cite à $\delta \times \pi''$. L'hypothèse de récurrence assure que l'orbite associée à ρ et $\delta \times \pi''$ contient dans sa fermeture l'orbite associée à ρ et $\delta \times \psi''$ (pour être plus correct, disons l'orbite associée à $\delta \times \pi'''$ avec $\pi''' \in \Pi(\psi''_L)$). Le fait que cette dernière orbite contient dans sa fermeture $O_{\psi,\rho}$ a été vérifié dans les deux premiers lemmes de **5.5**.

On considère maintenant le cas où pour tout $(\rho, a, b) \in Jord(\psi)$ si $a \geq b$ alors $b = 1$. Comme $\ell(\psi) > 0$, il existe (ρ, a, b) avec $a < b$, ce qui force $b > 1$. On fixe un tel élément avec encore $(a-b)/2$ maximum avec cette propriété de négativité. On raisonne comme ci-dessus, en utilisant **5.4** au lieu de **5.3** et le dernier lemme de **5.5**. Cela termine la preuve.

Remarque. *Le même résultat est vrai en remplaçant π_{temp} par une représen-*

tation irréductible π'' irréductible mais non nécessairement tempérée.

En effet on commence par plonger π'' dans un induite dont les exposants sont dans la chambre de Weyl négative (sous-module de Langlands) et on applique le lemme démontré en augmentant $\mathcal{I}$.

6.4. Paquets d'Arthur contenant une représentation non ramifiée. Il est tout à fait possible que la proposition ci-dessous ait en fait une preuve plus simple que celle donnée ici.

Proposition. *Soit ψ un morphisme alors $\Pi(\psi)$ contient une représentation non ramifiée si et seulement si la restriction de ψ à W_F est non ramifiée et la restriction de ψ à la première copie de $SL(2,\mathbb{C})$ est triviale. La représentation non ramifiée dans $\Pi(\psi)$ est alors unique.*

On fixe ψ et $\pi \in \Pi(\psi)$ et on suppose que π est non ramifiée. L'orbite de Langlands associée à π est l'orbite triviale; il résulte donc de **6.3** que la restriciton de ψ à la première copie de $SL(2,\mathbb{C})$ est triviale. Le support cuspidal de π est le support cuspidal étendu de π puisque π est non ramifiée (cf. la définition de **4.1**) et il se calcule à l'aide de ψ; cela force le fait que la restriction de ψ à W_F doit être non ramifié. La fin de la proposition a alors été prouvée en **4.4**.

7. Exposants

7.1. Définitions des exposants. Dans ce paragraphe on donne une majoration des exposants de toutes les représentations dans un paquet $\Pi(\psi)$. Supposons d'abord que $\pi \in \Pi(\psi_L)$; on garde la notation $\delta_b = 1/2$ si b est un entier pair et 1 si $b > 1$ est impair; on a évidemment $\delta_b = (b-1)/2 - [b/2] + 1$. Les exposants de π sont la collection des demi-entiers $\bigcup_{(\rho,a,b)\in Jord(\psi); b>1} \bigcup_{c\in[(b-1)/2,\delta_b]} c$. On note $Exp(\psi)$ l'ensemble de ces demi-entiers strictement positifs, ensemble avec multiplicité.

Soit π une représentation irréductible de G; on note $Exp(\pi)$ un ensemble de demi-entier strictement positifs, avec multiplicité, ordonné par l'ordre décroissant tel que pour tout $x \in Exp(\pi)$, il existe une représentation de Steinberg $St(\rho_x, d_x)$ et il existe une représentation tempérée π_{temp} tel que l'on ait une inclusion

$$\pi \hookrightarrow \left(\times_{x\in Exp(\pi)} St(\rho_x, d_x)|\cdot|^{-x} \right) \times \pi_{temp}. \tag{1}$$

En particulier $Exp(\pi)$ est bien uniquement déterminé.

On veut définir $Exp(\pi) \leq Exp(\psi)$; cela se fait comme pour les orbites unipotentes, on dit que $Exp(\pi) \leq Exp(\psi)$ si pour tout nombre entier t, la somme des t plus grands éléments de $Exp(\pi)$ (on ajoute des 0 si nécessaire) est supérieur ou égal à la somme des t plus grands éléments de $Exp(\psi)$ (là aussi, on ajoute des 0 si nécessaire).

On peut aussi fixer ρ comme on l'a fait dans tout ce qui précède et ne regarder que les exposants tels que le ρ_x ci-dessus soit ρ, on note alors $Exp_\rho(\pi)$

et $Exp_\rho(\psi)$. Il est clair que $Exp_\rho(\psi) = Exp_{\rho,\pi}$ si $\pi \in \Pi(\psi_L)$, c'est-à-dire est dans le paquet de Langlands à l'intérieur du paquet d'Arthur.

7.2. Comparaison des exposants à l'intérieur d'un paquet d'Arthur.

Proposition. *Soit ψ un morphisme et soit $\pi \in \Pi(\psi)$. Alors $Exp(\pi) \leq Exp(\psi)$ et plus précisément pour tout ρ comme ci-dessus, $Exp_\rho(\pi) \leq Exp_\rho(\psi)$.*

On fait comme dans **6.3** une récurrence sur $\ell(\psi) := \sum_{(\rho,a,b)\in Jord(\psi)}(b-1)$. Si $\ell(\psi) = 0$, le morphisme est tempéré et $Exp_\rho(\pi) = 0 = Exp_\rho(\psi)$, d'où a fortiori la proposition. La démonstration suit les mêmes lignes que celle de **6.3** et il faut donc reprendre du point de vue des exposants plusieurs lemmes. D'abord il faut l'analogue du lemme **6.2**: soit (ρ, a_i, x_i) une collection indexée par l'ensemble $\mathcal{I}$ de triplets, où ρ est fixé, a_i est un entier positif et x_i un réel strictement positif; on fixe aussi une représentation irréductible π''. On suppose que $\pi \hookrightarrow \times_{i\in\mathcal{I}} St(\rho, a_i)| \cdot |^{-x_i} \times \pi''$. Alors $Exp_\rho(\pi) \leq (Exp_\rho(\pi'') \bigcup_{i\in\mathcal{I}} x_i)$; en effet, quitte à remplacer π'' par l'inclusion de Langlands dans une induite ayant ses exposants dans la chambre de Weyl négative, on peut supposer que π'' est tempérée. L'assertion se démontre pas à pas en transformant l'inclusion de π donnée dans l'énoncé en une inclusion de Langlands comme cela a été expliquée en **6.2** et l'assertion cherchée est le (1) de loc. cite.

Il faut aussi l'analogue des lemmes de **5.5**; le point est dans tous les cas de vérifier que $(b-1)/2$ est supérieur ou égal aux exposants intervenant dans les induites. Pour les deux premiers lemmes, les induites sont de l'une des formes suivantes:

$$\times_{j\in[1,v/2}\langle (a_{2j}-1)/2, -(a_{2j-1}-1)/2\rangle_\rho;$$

$$\times_{j\in[1,([v-1)/2]]}\langle (a_{2j+1}-1)/2, -(a_{2j}-1)/2\rangle_\rho \times \langle (a_1-1)/2, -(a+b)/1+1\rangle_\rho;$$

$$\langle (a-b)/2, -(a_v-1)/2\rangle_\rho \times_{j\in[1,v[, j\equiv v[2]} \langle (a_{j+1}-1)/2, -(a_j-1)/2\rangle_\rho,$$

auquel on ajoute encore le facteur $\langle (a_1-1)/2, -(a+b)/2+1\rangle_\rho$ si v est pair.
Il suffit de démontrer que la somme des exposants est inférieure ou égale à $(b-1)/2$; or pour trouver la somme des exposants, il faut prendre l'opposé de la demi-somme des extrêmités. Par exemple pour la dernière induite écrite, on trouve $1/2\sum_{j\in[1,v/2]}(a_{2j-1}-a_{2j})/2$ plus, si v est pair $1/2((a+b)/2-1-(a_1-1)/2$. On utilise le fait que les a_j sont rangés dans l'ordre décroissant et que de plus $a_1 < a+b-1$ et $a_v > a-b+1$. Donc si v est impair la somme des exposants est certainement inférieure à

$$1/2((a_1-1)/2-(a-b)/2) < 1/2((a+b)/2-1-(a-b)/2) = 1/2(b-1).$$

Si v est pair, on obtient directement l'inégalité avec $1/2((a+b)/2-1-(a-b)/2) = 1/2(b-1)$. Pour les premières induites le calcul est évidemment analogue.

Pour le dernier lemme de **5.5**, l'induite à considérer est de la forme

$$\langle (a-b)/2, -(a_v-1)/2\rangle_\rho \times \times_{j\in[1,v[, j\equiv v[2]}\langle (a_{j+1}-1)/2, -(a_j-1)/2\rangle_\rho$$

auquel on ajoute encore le facteur $< (a_1-1)/2, -(a+b)/2+1 >$ si v est pair. Les a_i sont encore rangés dans l'ordre décroissant mais ici $(a-b)/2 < 0$ et on a

$a_v \geq b - a - 1$ et $a_1 < a + b - 1$. Que v soit pair ou impair, on obtient que la somme des exposants est inférieure ou égale à

$$1/2((a+b)/2 - 1 - (a-b)/2) = 1/2(b-1).$$

La démonstration est alors celle de **6.3**.

References

[1] Arthur J., *Unipotent automorphic representations, conjectures*, in: M. Andler ed., "Orbites unipotentes et représentations II," Astérisque, **171-172** (1989), 13–72.

[2] —, *On local character relations*, Selecta Math. **2** (1996), 501–579.

[3] —, *An introduction to the trace formula*, Clay Mathematics Proceedings **4** (2005), 1–253.

[4] —, *A note on L-packets*, Pure and applied math. quarterly **2** (special issue: in honor of J. H. Coates, part 1 of 2) (2006), 199–217.

[5] —, *Automorphic Representations of* GSp(4), In: H. Hida, D. Ramakrishnan, and F. Shahidi, eds., "Contributions to automorphic forms, geometry, and number theory," (Shalika volume), Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, MD, 2004, 65–81.

[6] —, *Automorphic Representations of Classical Groups*, en préparation.

[7] Bernstein I. N., and A. V. Zelevinsky, *Induced Representations of Reductive p-adic groups 1*, Ann. sci. de l'Ecole Norm. Sup., **10** (1977), 147–185.

[8] Clozel L. *Spectral theory of automorphic forms*, in: Automorphic forms and applications, IAS/Park City Math. ser. **12**, Amer. Math. Soc., Providence (2007), 43–93.

[9] —, *The ABS principle: consequences for* $L^2(G/H)$, prépublication 2007.

[10] —, *Combinatorial Consequences of Arthur's Conjectures and the Burger-Sarnak Method*, Int. Math. Research Notices, **11** (2004), 511–523.

[11] Harris, M., and R. Taylor, *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, Annals of Math. Studies **151**, Princeton Univ. Press, 2001.

[12] Henniart, G., *Une preuve simple des conjectures de Langlands pour* GL_n *sur un corps p-adique*, Invent. Math. **139** (2000), 439–455.

[13] Mœglin C., *Sur la classification des séries discrètes des groupes classiques p-adiques; paramètre de Langlands et exhaustivité*, J. Europ. Math. Soc. **4** (2002), 143–200.

[14] —, *Sur certains paquets d'Arthur et involution d'Aubert-Schneider-Stuhler généralisée*, Journal of Representation Theory **10** (2006), 86–129.

[15] —, *Paquets d'Arthur discrets pour un groupe classique p-adique*, in: D. Ginzburg, E. Lapid, D. Soudry, eds, "Automorphic forms and L-function, II: Local Aspects," Volume in honor of S. Gelbart, Contemporary Mathematics **489** (2009), 179–258.

[16] —, *Paquets d'Arthur pour les groupes classiques p-adiques; point de vue combinatoire*, prépublication 2006.

[17] —, *Multiplicité 1 dans les paquets d'Arthur aux places p-adiques*, Volume en l'honneur de F. Shahidi, Clay Math. Proceedings, à paraître.

[18] —, *Holomorphie des opérateurs d'entrelacement normalisés à l'aide des paramètres d'Arthur*, Canadian Journal of Math., à paraître.

[19] —, *Formes automorphes de carré intégrable non cuspidales*, Manuscripta Math., **127** (2008), 411–467.

[20] Mœglin C., and M. Tadic, *Construction of discrete series for classical p-adic groups*, J. Amer. Math. Soc., **15** (2002), 715–786.

[21] Mœglin, C., and J.-L. Waldspurger, *Le spectre résiduel de GL(n)*, Ann. sci. de l'Ecole Norm. Sup., **22** (1989), 605–674.

[22] —, *Sur le transfert des traces tordues d'un groupe linéaire à un groupe classique p-adique*, Selecta mathematica, **12** (2006), 433–516.

[23] Shahidi F., *Local coefficients and intertwining operators for GL(n)*, Compositio Math. **48** (1983), 271–295.

[24] —, *On the Ramanujan conjecture and finiteness of poles for certain L-functions*, Ann. of Math. **127** (1988), 547–584.

[25] —, *A proof of Langlands' conjecture on Plancherel measures; complementary series for p-adic groups*, Ann. of Math. **132** (1990), 273–330.

[26] Zelevinsky A. V., *Induced Representations of Reductive p-adic groups II*, Ann. sci. de l'Ecole Norm. Sup., **13** (1980), 165–210.

Colette Mœglin
Institut de Mathématiques de Jussieu
CNRS
175 rue du Chevaleret, 75013 Paris, France
moeglin@math.jussieu.fr

Received December 19, 2008
and in final form October 20, 2009