Konkrete Bijektionen zum Cantorschen Diagonalverfahren

Das Cantorsche Diagonalverfahren

$$\begin{array}{cccccccccc}
a_{11} & \to & a_{12} & & a_{13} & \to & a_{14} & & a_{15} & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \\
a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{24} & & a_{25} & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{34} & & a_{35} & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \\
a_{41} & & a_{42} & & a_{43} & & a_{44} & & a_{45} & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
a_{51} & & a_{52} & & a_{53} & & a_{54} & & a_{55} & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots
\end{array} \tag{1}$$

zeigt augenfällig, daß es die natürlichen Zahlen k bijektiv auf alle denkbaren Indexpaare (x, y), $x, y \in \mathbb{N}$, abbildet. Obwohl es an der Bijektion wegen des offensichtlichen Zusammenhangs zwischen den k und den (x, y) keinen vernünftigen Zweifel gibt, vermißt man dennoch eine eineindeutige Funktion $v: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, mit der zu einem beliebigen k ganz konkret das zugehörige Indexpaar berechnet werden kann, und deren Umkehrung $v^{-1}: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ aus (x, y) genau das k ermittelt, auf das v die Zahl k abbildet. Die beiden Funktionen v und v^{-1} und solche für höhere Dimensionen sollen im folgenden explizit hergeleitet und schließlich durch MATHEMATICA©-Funktionen realisiert werden.

Wir definieren eine Abbildung $v: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, indem wir zunächst die Folge der bekannten Dreieckszahlen $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$, $n \geq 1$,

$$1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91, 105, 120, 136, 153, 171, 190, \ldots \tag{2}$$

mit der zusätzlichen Definition $t_0 = 0$ betrachten. Es ist klar, daß es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ zwei wohlbestimmte Dreieckszahlen t_{n-1} und t_n, $n \geq 1$, mit

$$t_{n-1} + 1 \ \leq \ k \ \leq \ t_n \ = \ t_{n-1} + n \tag{3}$$

gibt. Setzen wir nun $f(k) = n$ für $k = t_{n-1} + r$, $1 \leq r \leq n$, fest, so hat man

$$f(t_{n-1} + r) \ = \ f(k) \qquad \text{für} \quad r = 1, 2, \ldots, n, \quad n \geq 1, \tag{4}$$

und für $r = n$ ergibt sich die etwas überraschend anmutende Gleichung

$$n \ = \ f(k) \ = \ f(t_{n-1} + n) \ = \ f(t_n) \ = \ f\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) \ = \ f\left(\frac{f(k)\big(f(k)+1\big)}{2}\right), \tag{5}$$

deren Ungewöhnlichkeit der fehlenden Injektivität von f zuzuschreiben ist, weil sie für die n Zahlen $k = t_{n-1} + 1, t_{n-1} + 2, \ldots, t_{n-1} + n$ gleichermaßen gilt. Beispielsweise hat man

$$f(7) \ = \ f(8) \ = \ f(9) \ = \ f(10) \ = \ 4 \ = \ f\left(\frac{f(k)\big(f(k)+1\big)}{2}\right), \qquad k = 7, 8, 9, 10. \tag{6}$$

Das zu einem beliebig vorgegebenen $k \in \mathbb{N}$ gemäß (3) gehörige $n = f(k)$ läßt sich aus der Gleichung

$$f(k) \ = \ \left[\!\!\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + 8(k-1)} - 1\right) \right]\!\!\right] + 1, \tag{7}$$

in der $[\![\,\cdot\,]\!]$ die Funktion des Größten Ganzen bezeichnet, gewinnen. Für $k_1 = t_{n-1}+1$ erhält man unter Berücksichtigung von $2t_{n-1} = (n-1)n$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Big(\sqrt{1+8(k_1-1)}-1\Big) &= \frac{1}{2}\Big(\sqrt{1+8t_{n-1}}-1\Big) = \frac{1}{2}\Big(\sqrt{1+4n^2-4n}-1\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\sqrt{(2n-1)^2}-1\Big) = n-1\,, \end{aligned} \tag{8}$$

mithin

$$f(k_1) = \left[\!\!\left[\frac{1}{2}\Big(\sqrt{1+8(k_1-1)}-1\Big)\right]\!\!\right]+1 = (n-1)+1 = n\,. \tag{9}$$

Und für $k_r = t_{n-1}+r$, $2 \le r \le n$, ergibt sich

$$\begin{aligned} n-1 &= \frac{1}{2}\Big(\sqrt{1+8(k_1-1)}-1\Big) < \frac{1}{2}\Big(\sqrt{1+8(k_r-1)}-1\Big) \\ &\le \frac{1}{2}\Big(\sqrt{1+8(k_n-1)}-1\Big) = \frac{1}{2}\Big(\sqrt{1+8(t_{n-1}+n-1)}-1\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\sqrt{1+8(t_n-1)}-1\Big) < \frac{1}{2}\Big(\sqrt{1+8t_n}-1\Big) = n\,, \end{aligned} \tag{10}$$

woraus auch für alle k_r mit $2 \le r \le n$

$$f(k_r) = \left[\!\!\left[\frac{1}{2}\Big(\sqrt{1+8(k_r-1)}-1\Big)\right]\!\!\right]+1 = n \tag{11}$$

folgt. Deswegen läßt sich in der Tat das für ein beliebiges k durch die Ungleichung $t_{n-1} < k \le t_n$ festgelegte n aus dem Ausdruck $\frac{1}{2}\big(\sqrt{1+8(k-1)}-1\big)$ mittels (7) eindeutig bestimmen. Mit Hilfe der solchermaßen berechenbar gemachten Funktion f läßt sich jetzt die ins Auge gefaßte Abbildung $v:\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ sehr einfach definieren. Wir setzen für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$i(k) = \frac{f(k)+1+(-1)^{f(k)}(2k-f(k)^2-1)}{2} \tag{12}$$

und

$$j(k) = \frac{f(k)+1+(-1)^{f(k)+1}(2k-f(k)^2-1)}{2} \tag{13}$$

und bilden daraus das Paar

$$\boxed{v(k) = \big(i(k), j(k)\big)} \tag{14}$$

Hierin sind $i(k)$ und $j(k)$ ganze Zahlen, denn ist $f(k)$ gerade, so ist $2k - f^2(k)-1$ ungerade und $f(k)+1$ ebenfalls, und demzufolge sind die Zähler von (12) und (13) gerade, und ist $f(k)$ ungerade, so sieht man ebenso leicht, daß die beiden Zähler auch in diesem zweiten Fall gerade sind. Darüber hinaus sind beide Zahlen positiv, wie man folgendermaßen erkennt: Nach Formelzeile (3) gilt

$$\frac{(n-1)n}{2}+1 \le k \le \frac{n(n+1)}{2} \tag{15}$$

und somit wegen $f(k) = n$

$$f(k)^2 - f(k)+2 \le 2k \le f(k)^2+f(k)\,. \tag{16}$$

Aus den beiden Ungleichungen (16) ergibt sich durch einfache Umformungen, daß sowohl $f(k)+1+(2k-f(k)^2-1)$ als auch $f(k)+1-(2k-f(k)^2-1)$ stets positiv sind, womit gezeigt ist, daß v tatsächlich $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ abbildet, und zwar, wovon man sich durch numerische

Proben überzeugen kann, genau in der Weise, wie die Elemente $a_{x,y}$ gemäß dem Cantorschen Abzählverfahren (1) den natürlichen Zahlen zugeordnet werden.

Ferner hat man, wie sich aus (12) und (13) unmittelbar ablesen läßt, die Beziehung

$$i(k) + j(k) \;=\; f(k) + 1\,. \tag{17}$$

Sie beschreibt das, was das Cantor-Schema (1) ins Auge fallen läßt, nämlich daß die Summe der Indizes in der n-ten Diagonale gleich $n+1$ ist.

Um die Bijektivität der Abbildung $v:\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ unanfechtbar zu zeigen, müssen die Injektivität und die Surjektivität von v nachgewiesen werden. Die Injektivität zeigt sich sehr schnell: Sei nämlich $v(k) = (x,y) = v(\ell)$. Dann muß $i(k) = x = i(\ell)$ und $j(k) = y = j(\ell)$ gelten. Das führt gemäß (12) und (13) auf

$$f(k) + 1 + (-1)^{f(k)}(2k - f(k)^2 - 1) \;=\; f(\ell) + 1 + (-1)^{f(\ell)}(2\ell - f(\ell)^2 - 1) \tag{18}$$

bzw.

$$f(k) + 1 + (-1)^{f(k)+1}(2k - f(k)^2 - 1) \;=\; f(\ell) + 1 + (-1)^{f(\ell)+1}(2\ell - f(\ell)^2 - 1) \tag{19}$$

Die Addition dieser beiden Gleichungen ergibt $2f(k)+2 = 2f(\ell)+2$, also $f(k) = f(\ell)$. Folglich kann man (18) zu

$$f(k) + 1 + (-1)^{f(k)}(2k - f(k)^2 - 1) \;=\; f(k) + 1 + (-1)^{f(k)}(2\ell - f(k)^2 - 1) \tag{20}$$

umschreiben, woraus sofort $k = \ell$ folgt. Damit ist die Injektivität von v bereits nachgewiesen.

Um die Surjektivität von v zu zeigen, muß zu einem beliebigen $(x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$ angegeben werden, für das $v(k_0) = (x,y)$ gilt. Wir setzen zu Abkürzung $m = x+y-1 \geq 1$ und behaupten, daß die Zahl

$$k_0 \;=\; \tfrac{1}{2}\big[m^2 + (-1)^{m+1}(m+1) + (-1)^m\, 2\,x + 1\big] \tag{21}$$

diese Eigenschaft hat. Sie ist jedenfalls eine ganze Zahl, denn für $m = 2t \geq 2$, $t \geq 1$, gilt

$$k_0 \;=\; \tfrac{1}{2}\big[(2t)^2 - (2t+1) + 2x + 1\big] \;=\; 2t^2 - t + x \;\in \mathbb{N}, \tag{22}$$

und für $m = 2t+1 \geq 1$, $t \geq 0$, findet man

$$k_0 \;=\; \tfrac{1}{2}\big[(2t+1)^2 + (2t+2) - 2x + 1\big] \;=\; 2t^2 + 3t - x + 2 \;\in \mathbb{Z}. \tag{23}$$

Daß auch das k_0 in (23) positiv ist, erkennt man so: Nach Definition von m gilt in diesem Fall $m+1 = 2t+2 = x+y$, so daß als zulässige Paare (x,y) genau die Paare

$$(1, 2t+1),\ (2, 2t),\ (3, 2t-1),\ \ldots\,,\ (2t+1, 1) \tag{24}$$

in Frage kommen. Das heißt $x \leq 2t+1$ oder $-x \geq -(2t+1)$ und liefert für (23) die Abschätzung

$$2t^2 + 3t - x + 2 \;\geq\; 2t + 2 - x \;\geq\; 1, \qquad t \geq 0\,. \tag{25}$$

Unser k_0 ist also eine natürliche Zahl. Gemäß dem, was eingangs ausgeführt wurde, ist deshalb gesichert, daß es ein eindeutiges n_0 gibt, welches der Ungleichung $t_{n_0-1}+1 \leq k_0 \leq t_{n_0}$ genügt, und daß darüber hinaus für die Zahlen $k_0 = t_{n_0-1}+1, t_{n_0-1}+2, \ldots, t_{n_0-1}+n_0$ die Gleichung $f(k_0) = n_0$ gilt.

Wir behaupten nun, daß $f(k_0) = m$ ist. Um das zu zeigen, müssen wir

$$f(k_0) \;=\; \left[\!\!\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+8(k_0-1)}-1\right)\right]\!\!\right]+1 \;=\; m \tag{26}$$

nachweisen. Unter Verwendung von (21) erhalten wir

$$\begin{aligned} &\left[\!\!\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+8\left\{\tfrac{1}{2}\left[m^2+(-1)^{m+1}(m+1)+(-1)^m\,2\,x+1\right]-1\right\}}-1\right)\right]\!\!\right]+1 \\ &\quad= \left[\!\!\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{4\left[m^2+(-1)^{m+1}(m+1)+(-1)^m\,2\,x+1\right]-7}-1\right)\right]\!\!\right]+1 \\ &\quad= \left[\!\!\left[\sqrt{m^2+(-1)^{m+1}(m+1)+(-1)^m\,2\,x-\tfrac{3}{4}}-\tfrac{1}{2}\right]\!\!\right]+1\,. \end{aligned} \tag{27}$$

Es reicht demnach, die Ungleichung

$$m-1 \;\le\; \sqrt{m^2+(-1)^{m+1}(m+1)+(-1)^m\,2\,x-\tfrac{3}{4}}-\tfrac{1}{2} \;<\; m \tag{28}$$

oder

$$m-\tfrac{1}{2} \;\le\; \sqrt{m^2+(-1)^{m+1}(m+1)+(-1)^m\,2\,x-\tfrac{3}{4}} \;<\; m+\tfrac{1}{2} \tag{29}$$

oder

$$-m+1 \;\le\; (-1)^{m+1}(m+1)+(-1)^m\,2\,x \;<\; m+1 \tag{30}$$

zu bestätigen. Eine letzte einfache Umformung führt schließlich, wenn man noch die Identität $(-1)^{m+1} = -(-1)^m$ berücksichtigt, auf die unserem Zweck dienliche Ungleichung

$$\begin{aligned} 0 \;&\le\; (-1)^{m+1}(m+1)+(-1)^m\,2\,x+m-1 \\ &=\; \bigl(1+(-1)^{m+1}\bigr)m+(-1)^m(2x-1)-1 \;<\; 2m \end{aligned} \tag{31}$$

Hieraus nun endlich ist die erstrebte Bestätigung von (28) abzulesen. Stützt man sich nämlich für gerades m auf $0 \le x-1 < m$, was nach Definition von m gewiß richtig ist, so erhält man

$$\begin{aligned} 2m \;>\; 2x-2 \;&=\; (1-1)m+(2\,x\,-1)-1 \\ &=\; \bigl(1+(-1)^{m+1}\bigr)m+(-1)^m(2\,x\,-1)-1 \;\ge\; 0\,, \end{aligned} \tag{32}$$

und geht man für ungerades m von $0 \le m-x < m$ aus, was ebenfalls gewiß richtig ist, so ergibt sich ebenfalls

$$\begin{aligned} 2m \;>\; 2(m-x) \;&=\; (1+1)m-(2\,x\,-1)-1 \\ &=\; \bigl(1+(-1)^{m+1}\bigr)m+(-1)^m(2\,x\,-1)-1 \;\ge\; 0\,. \end{aligned} \tag{33}$$

Weil die Ungleichungen (28) bis (32) alle miteinander äquivalent sind, ist bewiesen, daß die Ungleichung (28) für m gültig ist, daß also $f(k_0) = m$ statthat.

Mit diesem Ergebnis können wir jetzt $v(k_0) = (x,y)$ zeigen, also die Surjektivität von v nachweisen. Wegen $f(k_0) = m$ ergibt sich nämlich nach (12) und (13)

$$\begin{aligned} i(k_0) \;&=\; \tfrac{1}{2}\bigl\{m+1+(-1)^m(2k_0-m^2-1)\bigr\} \\ &=\; \tfrac{1}{2}\bigl\{m+1+(-1)^m\bigl(\bigl[m^2+(-1)^{m+1}(m+1)+(-1)^m\,2\,x+1\bigr]-m^2-1\bigr)\bigr\} \\ &=\; \tfrac{1}{2}\bigl\{m+1+(-1)^m\bigl((-1)^{m+1}(m+1)+(-1)^m\,2\,x\bigr)\bigr\} \\ &=\; \tfrac{1}{2}\bigl\{m+1+(-1)^{2m+1}(m+1)+(-1)^{2m}\,2\,x\bigr\} \;=\; x \end{aligned} \tag{34}$$

und

$$\begin{aligned} j(k_0) &= \tfrac{1}{2}\{m+1+(-1)^{m+1}(2k_0-m^2-1)\} \\ &= \tfrac{1}{2}\{m+1+(-1)^{m+1}\big([m^2+(-1)^{m+1}(m+1)+(-1)^m\,2\,x+1]-m^2-1\big)\} \\ &= \tfrac{1}{2}\{m+1+(-1)^{m+1}\big((-1)^{m+1}(m+1)+(-1)^m\,2\,x\big)\} \\ &= \tfrac{1}{2}\{m+1+(-1)^{2m+2}(m+1)+(-1)^{2m+1}\,2\,x\} \;=\; y\,, \end{aligned} \tag{35}$$

also $v(k_0)=(x,y)$. Das erlaubt uns, abschließend die zu (14) inverse Funktion niederzuschreiben:

$$\boxed{v^{-1}(x,y) \;=\; \tfrac{1}{2}\big[(x+y-1)^2+(-1)^{x+y}(x+y)+(-1)^{x+y-1}\,2\,x+1\big]} \tag{36}$$

Die beiden Funktionen v und v^{-1} lassen sich leicht in MATHEMATICA© realisieren. Sie sind nachstehend aufgelistet. Die MATHEMATICA©-Funktion

```
Cantor[n_] :=
  Last[{m=Floor[(Sqrt[1+8(n-1)]-1)/2]+1,
  {(m+1+(-1)^m(2n-m^2-1))/2,(m+1+(-1)^(m+1)(2n-m^2-1))/2}}]
```
(37)

berechnet zu einer natürlichen Zahl n das Indexpaar (i,j) im Cantorschen Diagonalverfahren.

Die MATHEMATICA©-Funktion

```
rotnaC[i_,j_] := ((i+j-1)^2+((-1)^(i+j))*(i+j)+2*((-1)^(i+j-1))*i+1)/2
```
(38)

ist die Umkehrung der MATHEMATICA©-Funktion `Cantor[n_]`. Sie berechnet zu einem Indexpaar (i,j) die natürliche Zahl n, aus der `Cantor[n_]` das Indexpaar (i,j) berechnet. Beispielsweise erhält man

```
Cantor[10^10] = {20332,121090}
```
(39)

oder umgekehrt

```
rotnaC[1000,1000] = 1998001.
```
(40)

Einmal im Besitz der Funktionen v und v^{-1} lassen sich mit Blick auf das erweiterte Cantor-Schema

$$\begin{array}{ccccccccccc} (1,v(1)) & \rightarrow & (1,v(2)) & & (1,v(3)) & \rightarrow & (1,v(4)) & & (1,v(5)) & \cdots \\ & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \\ (2,v(1)) & & (2,v(2)) & & (2,v(3)) & & (2,v(4)) & & (2,v(5)) & \cdots \\ \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\ (3,v(1)) & & (3,v(2)) & & (3,v(3)) & & (3,v(4)) & & (3,v(5)) & \cdots \\ & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \\ (4,v(1)) & & (4,v(2)) & & (4,v(3)) & & (4,v(4)) & & (4,v(5)) & \cdots \\ \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\ (5,v(1)) & & (5,v(2)) & & (5,v(3)) & & (5,v(4)) & & (5,v(5)) & \cdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots \end{array} \tag{41}$$

bei dem unter $(\nu,v(\mu))$ das Tripel $(\nu,i(\mu),j(\mu))$ verstanden werden soll, umstandslos auch Bijektionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ und darüber hinaus von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\cdots\times\mathbb{N}$ finden: Eine bijektive Funktion $v_3:\ \mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ beispielsweise läßt sich durch

$$v_3(k) \;=\; \big(i(k),v(j(k))\big) \;=\; \big(i(k),i(j(k)),j(j(k))\big) \tag{42}$$

definieren. Die zu (42) gehörige MATHEMATICA©-Funktion lautet

$$\texttt{CantorDrei[n\_] := Flatten[\{First[Cantor[n]],Cantor[Last[Cantor[n]]]\}],} \tag{43}$$

und für die inverse Funktion $v_3^{-1}:\ \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ findet man

$$v_3^{-1}(x,y,z)\ =\ v^{-1}\big(x,v^{-1}(y,z)\big) \tag{44}$$

mit der MATHEMATICA©-Funktion

$$\texttt{DreirotnaC[i\_,j\_,k\_] := rotnaC[i,rotnaC[j,k]].} \tag{45}$$

Beispiele zu den MATHEMATICA©-Realisierungen (43) und (45) sind

$$\texttt{CantorDrei[10\^{}10] = \{20332, 304, 189\}}\quad \text{und}\quad \texttt{DreirotnaC[10,10,10] = 17965.} \tag{46}$$

Hat man $v_\ell:\ \mathbb{N}\to\bigtimes_{i=1}^{\ell}\mathbb{N}_i$, $\mathbb{N}_i=\mathbb{N}$, für $\ell\geq 3$ schon definiert, so ist

$$v_{\ell+1}(k)\ =\ \big(i(k),v_\ell(j(k))\big) \tag{47}$$

eine Bijektion der „nächsthöheren Ordnung“ mit der Inversen

$$v_{\ell+1}^{-1}(x_1,x_2,\ldots,x_{\ell+1})\ =\ v^{-1}\big(x_1,v_\ell^{-1}(x_2,\ldots,x_{\ell+1})\big)\,. \tag{48}$$

Ihre MATHEMATICA©-Realisierungen verstehen sich nach den voranstehenden Ausführungen von selbst. Für v_4 und v_4^{-1} seien sie trotzdem noch notiert:

$$\texttt{CantorVier[n\_]:=Flatten[\{First[Cantor[n]],CantorDrei[Last[Cantor[n]]]\}],} \tag{49}$$

$$\texttt{VierrotnaC[i\_,j\_,k\_,l\_] := rotnaC[i,DreirotnaC[j,k,l]].} \tag{50}$$

Alle aufgeführten MATHEMATICA©-Funktionen können unter http://www.kronush.de/Cantor.txt als Text-Datei abgerufen werden.

Es ist auch klar, wie sich mit den eingeführten Funktionen v_ℓ und v_ℓ^{-1} konkrete Bijektionen zwischen beliebigen Gitterpunkträumen $\bigtimes_{i=1}^{\ell}\mathbb{N}_i$ und $\bigtimes_{i=1}^{m}\mathbb{N}_i$, $2\leq\ell<m$, definieren lassen. Wenn wir konsequenterweise nachträglich noch $v_2=v$ setzen, sind

$$w:\ \underbrace{\mathbb{N}\times\cdots\times\mathbb{N}}_{\ell\text{-mal}}\ \to\ \underbrace{\mathbb{N}\times\cdots\times\mathbb{N}}_{m\text{-mal}} \tag{51}$$

und ihre Umkehrfunktion

$$w^{-1}:\ \underbrace{\mathbb{N}\times\cdots\times\mathbb{N}}_{m\text{-mal}}\ \to\ \underbrace{\mathbb{N}\times\cdots\times\mathbb{N}}_{\ell\text{-mal}} \tag{52}$$

durch

$$w\ =\ v_m\circ v_\ell^{-1}\qquad\text{bzw.}\qquad w^{-1}\ =\ v_\ell\circ v_m^{-1} \tag{53}$$

eindeutig definiert und mit den obigen MATHEMATICA©-Funktionen mühelos zu realisieren.