Elementarer Beweis der Irrationalität von π

Behauptung: *Die Zahl π ist irrational.*

Beweis: Wir nehmen das Gegenteil an, nämlich daß

$$\pi = \tfrac{a}{b} \tag{1}$$

gilt, wobei a und b zwei natürliche Zahlen sind, und definieren zu jeder natürlichen Zahl n zwei reelle Funktionen f_n und F_n durch

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}, \\ F_n(x) &= f_n(x) - f_n''(x) + f_n^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^j f_n^{(2j)}(x) + \cdots + (-1)^n f_n^{(2n)}(x). \end{aligned} \tag{2}$$

Hierin bezeichnet $f_n^{(2j)}$ die $(2j)$-te Ableitung von f_n.

Für $0 \le j < n$ verschwindet die j-te Ableitung von f_n an den Stellen 0 und π. Um das zu erkennen, reicht es, die erste Ableitung von $x^n(a-bx)^n$ zu bilden:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\, x^n(a-bx)^n &= nx^{n-1}(a-bx)^n + n(a-bx)^{n-1}(-b)x^n \\ &= n\{x^{n-1}(a-bx)^n - bx^n(a-bx)^{n-1}\} \\ &= n\{(ax-bx^2)^{n-1}(a-bx) - bx(ax-bx^2)^{n-1}\} \\ &= n(ax-bx^2)^{n-1}(a-2bx) = nx^{n-1}(a-bx)^{n-1}(a-2bx) \end{aligned} \tag{3}$$

Allein daraus ist ersichtlich, daß auch die höheren Ableitungen von f_n bis $j<n$ hinauf aus Summanden bestehen, deren jeder den Faktor $ax-bx^2$ enthält. Der aber verschwindet sowohl für $x=0$ als auch für $x = \pi = \frac{a}{b}$.

Für $n \le j \le 2n$ ist die j-te Ableitung von f_n an den Stellen 0 und π ganzzahlig. Um das zu erkennen, reicht die Betrachtung von (3) nicht aus. Wir müssen dazu $f_n(x)$ nach dem Binomialsatz entwickeln:

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!}\left(a^n - \binom{n}{1}a^{n-1}bx + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2x^2 - \cdots + (-1)^n b^n x^n\right) \tag{4}$$

Setzen wir nun zur Abkürzung $c_{n+k} = (-1)^k\binom{n}{k}a^{n-k}$, $0 \le k \le n$, so erhalten wir

$$f_n(x) = \frac{1}{n!}(c_n x^n + c_{n+1}bx^{n+1} + c_{n+2}bx^{n+2} + \cdots + c_{2n}b^n x^{2n}). \tag{5}$$

Hierin sind alle c_i, $n \le i \le 2n$, ganze Zahlen. Für die erste bis n-te Ableitung der so umgeformten Funktion $f_n(x)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= \frac{1}{n!}\big(nc_n x^{n-1} + (n+1)c_{n+1}bx^n + (n+2)c_{n+2}bx^{n+1} + \cdots + (2n)c_{2n}b^n x^{2n-1}\big), \\ f_n''(x) &= \frac{1}{n!}\big(n(n-1)c_n x^{n-2} + (n+1)nc_{n+1}bx^{n-1} + (n+2)(n+1)c_{n+2}bx^n + \cdots \\ &\qquad \cdots + (2n)(2n-1)c_{2n}b^n x^{2n-2}\big), \\ &\ \vdots \\ f_n^{(n)}(x) &= \frac{1}{n!}\big(n!c_n + [\,(n+1)n\cdots 2\,]c_{n+1}bx^1 + [\,(n+2)(n+1)\cdots 3\,]c_{n+2}bx^2 + \cdots \\ &\qquad \cdots + [\,(2n)(2n-1)\cdots(n+1)\,]c_{2n}b^n x^n\big) \\ &= \frac{n!}{n!}c_n + \frac{(n+1)!}{n!\,1!}c_{n+1}bx + \frac{(n+2)!}{n!\,2!}c_{n+2}b^2x^2 + \cdots + \frac{(2n)!}{n!\,n!}c_{2n}b^n x^n \\ &= c_n + \binom{n+1}{1}c_{n+1}bx + \binom{n+2}{2}c_{n+2}b^2x^2 + \cdots + \binom{2n}{n}c_{2n}b^n x^n. \end{aligned} \tag{6}$$

Weil die Koeffizienten $\binom{n+k}{k}c_{n+k}$, $0 \le k \le n$, ganze Zahlen sind, ist $f_n^{(n)}$ ein Polynom in x mit ganzahligen Koeffizienten. Es ist $f_n^{(n)}(0) = c_n \in \mathbb{Z}$, und auch $f_n^{(n)}(\pi)$ ist ganzzahlig, denn es gilt

$$f_n^{(n)}(\tfrac{a}{b}) \;=\; c_n + \binom{n+1}{1}c_{n+1}a + \binom{n+2}{2}c_{n+2}a^2 + \cdots + \binom{2n}{n}c_{2n}a^n \;\in \mathbb{Z}. \tag{7}$$

Für die höheren Ableitungen $f^{(j)}$, $n < j \le 2n$, stellen sich $f_n^{(j)}(0)$ und $f_n^{(j)}(\pi)$ ebenfalls als ganzzahlig heraus. Es ist

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \binom{n+1}{1}c_{n+1}b + 2\binom{n+2}{2}c_{n+2}b^2x + \cdots + n\binom{2n}{n}c_{2n}b^nx^{n-1}, \\ f^{(n+2)}(x) &= 2\binom{n+2}{2}c_{n+2}b^2 + 6\binom{n+3}{3}c_{n+3}b^3x + \cdots + n(n-1)\binom{2n}{n}c_{2n}b^nx^{n-2}, \\ &\;\vdots \\ f^{(2n)}(x) &= n!\binom{2n}{n}c_{2n}b^n \end{aligned} \tag{8}$$

und folglich

$$f^{(n+k)}(0) \;=\; k!\binom{n+k}{k}c_{n+k}b^k \;=\; \frac{(n+k)!}{n!}\,c_{n+k}b^k \;\in \mathbb{Z}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{9}$$

Um auch $f_n^{(j)}(\pi)$ für $n < j \le 2n$ zweifelsfrei als ganzzahlig nachzuweisen, muß man die $f^{(n+k)}$-te Ableitung, $k = 1, 2, \ldots, n$, die in (8) nicht notiert wurde, genau hinschreiben. Sie lautet, wenn man die für $i = 0, 1, 2, \ldots, n-k$ gültige Identität

$$\frac{(k+i)!}{i!}\binom{n+k+i}{k+i} \;=\; \frac{(k+i)!}{i!}\cdot\frac{(n+k+i)!}{(k+i)!\big(n+k+i-(k+i)\big)!} \;=\; \frac{(n+k+i)!}{i!\,n!} \tag{10}$$

berücksichtigt,

$$\begin{aligned} f^{(n+k)}(x) \;=\; &\frac{(n+k+0)!}{0!\,n!}\,c_{n+k}b^k + \frac{(n+k+1)!}{1!\,n!}\,c_{n+k+1}b^{k+1}x \\ &+ \frac{(n+k+2)!}{2!\,n!}c_{n+k+2}b^{k+2}x^2 + \cdots \\ &\cdots + \frac{(n+k+i)!}{i!\,n!}\,c_{n+k+i}b^{k+i}x^i + \cdots + \frac{(2n)!}{(n-k)!\,n!}b^nx^{n-k} \end{aligned} \tag{11}$$

Hierin sind die Faktoren $\frac{(n+k+i)!}{i!\,n!}$, wie aus (10) hervorgeht, ganze Zahlen. Man erhält nun für $f^{(n+k)}(\pi) = f^{(n+k)}(\frac{a}{b})$ die Summe

$$f^{(n+k)}(\tfrac{a}{b}) \;=\; \sum_{i=0}^{n-k}\frac{(n+k+i)!}{i!\,n!}\,c_{n+k+i}b^{k+i}\frac{a^i}{b^i} \;=\; \sum_{i=0}^{n-k}\frac{(n+k+i)!}{i!\,n!}\,c_{n+k+i}b^ka^i \;\in \mathbb{Z}. \tag{12}$$

Schließlich bleibt noch festzuhalten, daß die Ableitungen von f_n für $j > 2n$ vollständig verschwinden, denn $x^n(a-bx)^n$ ist ein Polynom in x vom Grade $2n$.

Damit haben wir folgendes wesentliche Zwischenergebnis: Die Funktion f_n und alle ihre Ableitungen sind an den Stellen 0 und $\pi = \frac{a}{b}$ ganzzahlig. Aus diesem Grunde ist auch die Funktion F_n an den Stellen 0 und $\pi = \frac{a}{b}$ ganzzahlig.

Aus (2) ist ohne Umstände die Gültigkeit der Gleichung $F_n + F_n'' = f$ abzulesen. Man beachte dabei, daß $f^{(2n+2)}$ verschwindet. Diese Gleichung zieht, wie man schnell nachrechnet, $(F_n' \cdot \sin - F_n \cdot \cos)' = f_n \cdot \sin$ nach sich. Das ergibt nunmehr

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f_n(x)\sin(x)\,dx &= \Big[F_n'(x)\sin(x) - F_n(x)\cos(x)\Big]_0^\pi \\ &= F_n'(\pi)\sin\pi - F_n(\pi)\cos\pi - F_n'(0)\sin 0 + F_n(0)\cos 0 \\ &= F_n'(\pi)\cdot 0 - F_n(\pi)\cdot(-1) - F_n'(0)\cdot 0 + F_n(0)\cdot 1 \\ &= F_n(0) + F_n(\pi)\,. \end{aligned} \tag{13}$$

Nach unserem Zwischenergebnis ist dieses Integral eine ganze Zahl. Andererseits folgt aus $0 \le x \le \pi = \frac{a}{b}$ die Ungleichung $0 \le bx \le a$ und daraus $0 \le a - bx \le a$. Mithin gilt

$$0 \;\le\; f_n(x) \;\le\; \frac{\pi^n a^n}{n!}\,, \tag{14}$$

woraus sich für das Integral (13) die Abschätzung

$$\begin{aligned} 0 \;\le\; \int_0^\pi f_n(x)\sin(x)\,dx \;&=\; \left|\int_0^\pi f_n(x)\sin(x)\,dx\right| \\ &\le\; \int_0^\pi |f_n(x)||\sin(x)|\,dx \;\le\; \frac{\pi^n a^n}{n!}\int_0^\pi |\sin(x)|\,dx \;=\; \frac{2\,\pi^n a^n}{n!} \end{aligned} \tag{15}$$

ergibt. Weil $n!$ schneller als jede Potenz u^n, $u > 0$, wächst, kann der Ausdruck $\frac{2\,\pi^n a^n}{n!}$ für hinreichend großes n unter jede beliebige positive Schranke gedrückt, insbesondere also kleiner als 1 gemacht werden. Zugleich ist $f_n(\frac{\pi}{2})\sin\frac{\pi}{2} = \frac{1}{n!}(\frac{a}{2b})^n(a - b\frac{a}{2b})^n \sin\frac{a}{b} > 0$, so daß wegen der Stetigkeit von $f_n \cdot \sin$

$$\int_0^\pi f_n(x)\sin(x)\,dx \;>\; 0 \tag{16}$$

gesichert ist. Zusammen mit (15) (bei hinreichend großen n) haben wir damit einen Widerspruch gegen die Ganzahligkeit des Integrals $\int_0^\pi f_n(x)\sin(x)\,dx$ erlangt. $\boxdot$

Quelle: http://www.lrz-muenchen.de/ hr/numb/pi-irr.html