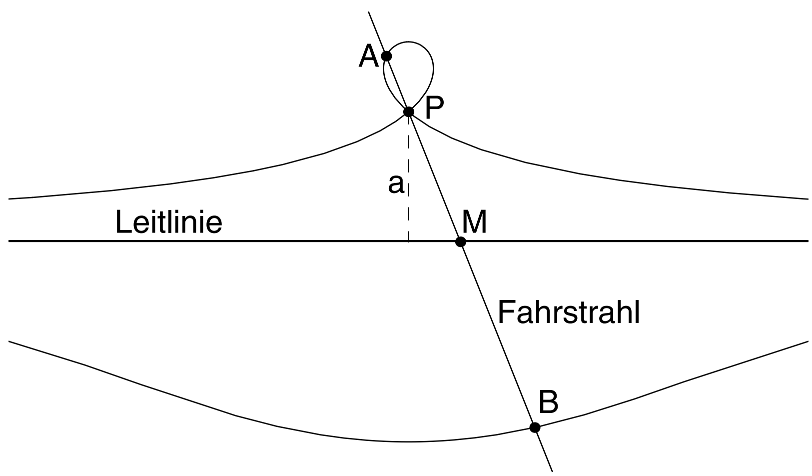
Die Dreiteilung des Winkels mit Hilfe der Konchoide

Bekanntlich ist die Dreiteilung eines beliebigen Winkels mit Zirkel und Lineal nicht möglich. Läßt man indessen den schon im Altertum bekannten Konchoiden-Zirkel zu, so ist die Winkeltrisektion tatsächlich möglich. Dabei handelt es sich nicht etwa um eine approximative Lösung, sondern in der Tat um eine genaue Kontruktion. [1)]

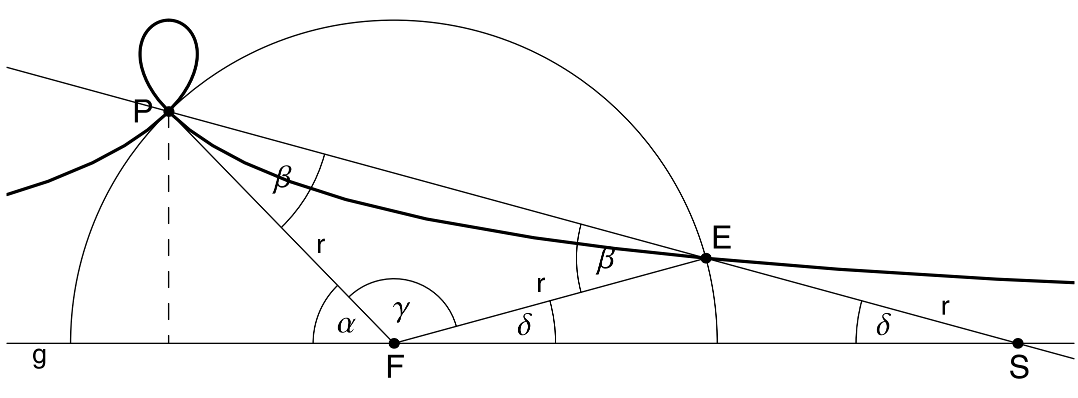
Zu einer Konchoide gehören eine feste Gerade g, die sogenannte Leitline, und ein fester Punkt P, der außerhalb der Geraden g liegt. Dreht sich ein Fahrstrahl um den Punkt P, der hier Pol der Konchoide heißen soll, so bildet die Konchoide den geometrischen Ort aller Punkte A und B, die auf dem Fahrstrahl liegen und die zusätzliche Bedingung erfüllen, daß sich der Mittelpunkt M der Strecke $\overline{AB}$ auf der Leitlinie g befindet, wobei $r = \overline{AM} = \overline{BM}$ eine die Gestalt der Konchoide bestimmende positive Konstante ist. Die zweite die Gestalt der Konchoide bestimmende positive Konstante ist der Abstand a des Pols P von der Leitlinie g. Ist er kleiner als r, so entsteht eine Konchoide der folgenden Form:



Die Parameterdarstellung der obigen Konchoide, bei der P im Koordinatenursprung liegt, lautet

$$x(\varphi) \;=\; -a\tan\varphi - r\sin\varphi\,, \qquad y(\varphi) \;=\; -a - r\cos\varphi\,, \qquad -\pi \le \varphi \le \pi\,. \tag{1}$$

Der unterhalb der Leitlinie liegende Zweig der Konchoide ist für die Winkeltrisektion unerheblich. Er ist deswegen in der folgenden Zeichnung, die den Lösungsweg für die Winkeltrisektion erläutern soll, fortgelassen.



[1)] Der griechische Mathematiker *Nikomedes*, der um 200 v. Chr. lebte, gilt als Entdecker der Konchoide und Konstrukteur des Konchoiden-Zirkels, womit ihm die Lösung der Winkeltrisektion gelang.

Die Konstruktion: Auf einer Geraden g, die im weiteren Verlauf die Leitlinie der Konchoide, die zur Winkeltrisektion benutzt werden soll, bildet, wählt man einen Punkt F und trägt in diesem Punkt den gegebenen Winkel α ab. In der Wahl der Konchoidenkonstante r ist man frei. Um die Lage des Pols festzulegen, setzt man $\overline{PF} = r$ fest. Dann erhält man P, indem man einen Halbkreis um F mit dem Radius r schlägt. Danach wird die Konstante a konstruiert. Aus der Zeichung kann man ablesen, daß $a = r \sin\alpha$ sein muß. Damit hat man die beiden Konstanten r und a, die die Gestalt der Konchoide bestimmen, sowie die Leitlinie g und die Lage des Pols P zur Verfügung, um die Konchoide zu zeichnen.[2] Der Halbkreis schneidet die Konchoide im Punkt E, der entscheidend zur Konstruktion des Winkels $\frac{\alpha}{3}$ beiträgt.

Nun schneidet der Fahrstrahl, der sich zur Erzeugung der Konchoide im Pol P dreht, sobald er durch den Punkt E geht, die Leitlinie im Punkt S. Die Strecke $\overline{ES}$ aber hat nach Definition der Konchoide genau die Länge der Konchoiden-Konstante r.

Wir haben demzufolge die beiden gleichschenkligen Dreiecke $\triangle PFE$ und $\triangle FES$ vorliegen, für die

$$r \;=\; \overline{PF} \;=\; \overline{FE} \;=\; \overline{ES} \tag{2}$$

gilt. Überdies ist β Außenwinkel am Dreieck $\triangle FES$ im Punkt E und folglich $\beta = 2\delta$. Damit sind wir bereits fertig, denn es gilt mit Blick auf das Dreieck $\triangle PFE$

$$\alpha + \gamma + \delta \;=\; 180^\circ \;=\; \gamma + 2\beta \;=\; \gamma + 4\delta \tag{3}$$

also

$$\boxed{\delta \;=\; \frac{\alpha}{3}}. \tag{4}$$

Man erkennt — am Rande bemerkt — leicht, daß die Strecke $\overline{PF}$, wenn man sie nach beiden Seiten verlängert, eine Gerade mit der Steigung $\pi - \alpha$ ist, die eine Tangente an die Konchoide im Pol P bildet.

[2] Wie ein Konchoiden-Zirkel hergestellt wird und wie man ihn handhabt, soll hier nicht beschrieben werden. Es muß an dieser Stelle die Behauptung genügen, daß er existiert und mit ihm die abgebildete Konchoide gezeichnet werden kann.