Seminar Sophus Lie
2 (1992) 85–93

Hausdorff und die Exponentialformel in der Lie-Theorie[1]

Günter Czichowski

1. Historisches

Das Jahr 1992 gibt besonderen Anlaß zur Würdigung zweier großer Mathematiker: Zum einen jährt sich zum 50. Male der Todestag von Felix Hausdorff, dem bedeutenden Mengentheoretiker und Topologen. Zum anderen wurde vor 150 Jahren Sophus Lie geboren, der mit seinen großen Ideen zur Verbindung von Gruppentheorie, Geometrie und Analysis Entwicklungen auslöste, die noch heute andauern. Mit der Arbeit, die im Mittelpunkt dieser Darlegung stehen soll, hat Hausdorff, obwohl sich seine mathematische Forschungen nicht hauptsächlich im Feld Liescher Arbeitsrichtungen bewegten, einen grundlegenden Beitrag zur Entwicklung der Theorie Liescher Gruppen geleistet. Die Tatsache, daß beide Mathematiker längere Zeit in Leipzig wirkten, ist vielleicht eine naheliegende Erklärung für einige gruppentheoretische Interessen von Hausdorff; dem Verfasser ist jedoch nichts Genaueres darüber bekannt. Wie die weitere Entwicklung zeigte, betraf sein Resultat direkt den Kern der Lieschen Theorie, der wohl in den Beziehungen zwischen Liegruppen und Liealgebren besteht. Eine Liegruppe G ist bekanntlich eine Gruppe, die zugleich eine solche Struktur als differenzierbare Mannigfaltigkeit hat, daß die Gruppenoperationen $(x, y) \mapsto x{\cdot}y$ und $x \mapsto x^{-1}$ durch differenzierbare Abbildungen beschrieben werden. Als Standardbeispiele können hierbei die bekannten Matrizengruppen wie $SL(n, \mathbb{R})$ oder $GL(n, \mathbb{R})$ usw. dienen. Der wesentliche Effekt der Lie-Theorie besteht nun darin, daß die relativ komplizierte Struktur einer Liegruppe beschrieben wird durch ihre Liealgebra. Dies ist im wesentlichen eine Struktur der linearen Algebra, nämlich ein Vektorraum mit einem zusätzlichen bilinearen Produkt (dem Kommutator $[\cdot, \cdot]$), das antikommutativ ist und der Jacobi-Identität $[x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = 0$ (als Ersatz für die Assoziativität) genügt. Auch hier können wieder die Liealgebren von Matrizen wie $sl(n, \mathbb{R})$ oder $gl(n, \mathbb{R})$ mit der Kommutatorbildung $[x, y] = x{\cdot}y - y{\cdot}x$ als Standardbeispiele dienen.

Beide Objekte, die Liegruppe G und ihre Liealgebra L, sind nun verknüpft durch die Exponentialabbildung $\exp : L \to G$, die L in G abbildet und glatt ist. Dabei wird eine Nullumgebung aus L diffeomorph auf eine Umgebung des Einselementes in G abgebildet. Deshalb kann man (zumindestens lokal) die Multiplikation von G nach L übersetzen und danach fragen, wie sie sich in der Liealgebra wiederspiegelt. Die Antwort auf diese wichtige Frage wird nun durch eine Formel gegeben, die in voller Allgemeinheit zuerst von Felix Hausdorff bewiesen worden ist: Für El-

[1] Dies ist der Abdruck eines Artikels, welcher in einem Sammelband zur Erinnerung an den 50. Todestag von Felix Hausdorff erscheinen wird.

emente x, y in einer hinreichend kleinen Nullumgebung von L gilt

$$e^x \cdot e^y = e^{CH(x,y)}$$

mit

$$CH(x,y) = x + y + \frac{1}{2} \cdot [x,y] + \cdots \tag{1}$$

Diese Gleichung wird als Campbell-Hausdorff-Formel bezeichnet, und die rechte Seite heißt auch Campbell-Hausdorff-Reihe. Neben x und y stehen darin nur Glieder, die (von Zahlenfaktoren abgesehen) nur durch Kommutatoren von x und y allein gebildet werden. Als Folgerung ergeben sich zwei zentrale Aussagen der Lie-Theorie:

Die Multiplikation in einer Liegruppe G ist lokal durch die Struktur ihrer Liealgebra bestimmt. Liegruppen mit isomorphen Liealgebren sind lokal isomorph.

Zu jeder Liealgebra L (mit $\dim L < \infty$) existiert auch eine lokale Liegruppe, nämlich als eine Nullumgebung in L mit der Multiplikation $x \circ y = CH(x,y)$.

Man kann daher HAUSDORFFs Ergebnis mit Recht als grundlegend für eine allgemeine Theorie der Liegruppen bezeichnen. Während bei SOPHUS LIE vor allem *Transformationsgruppen* im Mittelpunkt seiner Untersuchungen standen, werden in der Folgezeit Liegruppen zu selbständigen Strukturen, die nicht unbedingt auf einen zu transformierenden Raum bezogen sind. Mit Blick auf die zentrale Bedeutung der Beziehung Liealgebra–Exponentialabbildung–Liegruppe hat daher K. H. Hofmann [11,12,13] 1972 vorgeschlagen, bei der Darlegung und Gestaltung der Theorie folgende Definition an die Spitze zu stellen:

Eine Liesche Gruppe ist eine Hausdorffsche topologische Gruppe mit einer Exponentialfunktion, die die Funktionalgleichung von Campbell, Dynkin und Hausdorff im Kleinen erfüllt.

In der Tat gelangt man auf diesem Weg am schnellsten zu den wesentlichen Aussagen der Theorie, die bekannten linearen Gruppen sind leicht als Liegruppen verifizierbar, und der mühsame historische Weg bis zur Entstehung der Theorie muß nicht unbedingt nachvollzogen werden.

Schließlich sei noch vermerkt, daß HAUSDORFF auch die Untersuchungen von BAKER [1] und CAMPBELL [3] zum gleichen Gegenstand bekannt waren, die einige Jahre früher erfolgten (mitunter wird auch der Name BAKER bei der Benennung der Formel mitgeführt). Er hat aber mit Recht auf die einschränkenden Bedingungen verwiesen (Rechnungen im Kalkül der Matrizen bzw. Differentialoperatoren), die bei beiden Vorgängern zugrunde lagen.

2. Ableitung der Campbell-Hausdorff-Formel

Obwohl später von DYNKIN [8] auch die explizite Form der Campbell-Hausdorff-Reihe, nämlich der Reihe für die Funktion

$$CH(x,y) = \log(e^x \cdot e^y),$$

berechnet wurde, ist für die Bedeutung in der Theorie zunächst die qualitative Aussage wichtiger, daß diese Reihe durch Kommutatoren allein gebildet werden kann. Der kürzeste Weg zum Beweis dieser Aussage, auch von Hausdorff beschritten, läuft darauf hinaus, über Rekursionsbeziehungen zu zeigen, daß die homogenen Glieder dieser Reihe alle Linearkombinationen von Kommutatoren sind.
So bildet man etwa die Reihe für die Funktion $CH(t\cdot x, t\cdot y)$, $(t \in \mathbb{R})$ und ordnet nach Potenzen von t:

$$CH(t\cdot x, t\cdot y) = t\cdot CH_1(x,y) + t^2\cdot CH_2(x,y) + \cdots$$

Dann zeigt man rekursiv, daß alle Glieder $CH_k(x,y)$ Linearkombinationen von Kommutatoren sind.

Wir demonstrieren hier ein kurzes Verfahren (siehe auch [4]), bei dem die Ableitungen und Konstruktionen in einer vollständigen normierten Algebra erfolgen, um mit Potenzreihenkalkül und elementarer Differentialrechnung bequem umgehen zu können. In 4. wird später erläutert, daß dieses Verfahren durchaus so für eine ganze Klasse lokal konvexer Algebren verallgemeinert werden kann, daß auch der Fall der formalen Potenzreihen, in dem HAUSDORFFs Rechnungen verlaufen, eingeschlossen ist.
Sei A also eine vollständige normierte Algebra mit Eins und mit einer Norm, die submultiplikativ ist, d.h. es gilt

$$\|x\cdot y\| \leq \|x\|\cdot\|y\|.$$

Mit $[x,y] = x\cdot y - y\cdot x$ werde wieder der Kommutator zweier Elemente bezeichnet, und die Norm läßt sich dann auch noch so wählen, daß gilt $\|[x,y]\| \leq \|x\|\cdot\|y\|$. Für jedes $x \in A$ ist dann die Abbildung $ad\,x$ als Kommutatorbildung mit x definiert:

$$ad\,x = (y \mapsto [x,y])$$

$ad\,x$ ist stetig, die Norm dieser Abbildung ist $\leq \|x\|$.
Jetzt läßt sich in A auf zweierlei Weise mit einem Kalkül analytischer Funktionen arbeiten:
Ist $f(z) = \sum a_n z^n$ eine reelle, für $|z| \leq \rho$ analytische Funktion, dann wird in der Nullumgebung $U = \{x \in A : \|x\| \leq \rho\}$ durch $f(x) \stackrel{def}{=} \sum a_n x^n$ eine entsprechende analytische Abbildung von U in A definiert.
Ebendso wird für jedes $x \in U$ eine Abbildung $f(ad\,x)$ von A in A durch

$$f(ad\,x)(y) \stackrel{def}{=} \sum a_n\cdot(ad\,x)^n(y)$$

definiert. Für das Folgende sind insbesondere die Regeln

$$(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x), \tag{2}$$

$$(f\cdot g)(ad\,x) = f(ad\,x) \circ g(ad\,x) \tag{3}$$

wichtig, die für je zwei in Null analytische Funktionen f und g und für kleine x gelten. Dies ergibt sich unmittelbar über die Multiplikation der entsprechenden

Potenzreihen. Für den angekündigten Beweis benötigen wir außerdem noch zwei Formeln, die sich leicht durch Induktion beweisen lassen:
Es gilt stets

$$(ad\,x)^n(y) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \binom{n}{i} x^{n-i}yx^i. \tag{4}$$

Ist ferner $u\colon \mathbb{R} \to A$ eine stetig differenzierbare Funktion, dann gilt

$$\frac{d}{dt}u^n = \sum_{k=0}^{n-1} u^{n-k-1}(-\,ad\,u)^i(\dot{u}), \tag{5}$$

wobei $\dot{u}$ die Ableitung von u nach t bedeutet.
Multipliziert man (4) mit $\frac{1}{n!}$ und summiert auf, dann ergibt sich die wichtige Beziehung

$$e^{ad\,x}(y) = e^x y e^{-x}. \tag{6}$$

Die Gleichung (5) erlaubt durch gliedweise Differentiation der entsprechenden Reihe für e^u eine Formel zur Berechnung der Ableitung von e^u nach t, wenn u von t abhängt: Es ist

$$\frac{d}{dt}e^u = \sum_{0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k+1}u^{n-k-1}(-\,ad\,u)^k(\dot{u}).$$

Setzt man hier als neue Indizes $\mu = n-k-1, \nu = k+1$, dann erhält man

$$\frac{d}{dt}e^u = \sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{u^\mu}{\mu!}\frac{(-\,ad\,u)^{\nu-1}(\dot{u})}{\nu!} = e^u{\cdot}f(ad\,u)(\dot{u}), \tag{7}$$

wobei $f(z) = \frac{1-e^{-z}}{z}$ ist.
Nach diesen Vorbereitungen erfolgt nun der Beweis recht schnell. Wir setzen

$$e^{t\cdot x}e^{t\cdot y} = e^{CH(t\cdot x, t\cdot y)}$$

und

$$u = CH(t{\cdot}x, t{\cdot}y) = \sum_{k=}^{\infty} t^k{\cdot}\, CH_k(x,y).$$

Dann folgt durch Differentiation von e^u nach t zunächst

$$e^u{\cdot}f(ad\,u)(\dot{u}) = xe^u + e^u y.$$

Multiplikation mit e^{-u} und Benutzung von (6) liefert weiter

$$f(ad\,u)(\dot{u}) = e^{-\,ad\,u}(x) + y.$$

Hier ist wieder $f(z) = \frac{1-e^{-z}}{z}$, und mit $g = \frac{1}{f}$ sowie (3) erhält man schließlich

$$\dot{u} = g(ad\,u)(e^{-\,ad\,u}(x) + y) = g(-\,ad\,u)(x) + g(ad\,u)(y)$$

Mit der Taylor-Entwicklung

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k,$$

die B_k sind dabei die Bernoullischen Zahlen, ergibt sich in Form einer Reihe

$$\dot{u} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} (ad\, u)^k (x + (-1)^k y)$$

Durch Differentiation an der Stelle $t = 0$ erhält man hieraus rekursiv, mit der Abkürzung CH_k für $CH_k(x, y)$ und beginnend mit $CH_0 = u(0) = 0$,

$$\begin{aligned} CH_1 &= x + y \\ CH_2 &= \frac{1}{2}[x, y] \\ &\vdots \\ CH_m &= \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{m_1+\cdots+m_k=m-1} \frac{1}{m} \frac{B_k}{k!} [CH_{m_1}, [CH_{m_2}, [\cdots [CH_{m_k}, x + (-1)^k y] \cdots]]] \end{aligned}$$

Hieraus folgt unmittelbar, daß alle Terme $CH_m(x, y)$ durch Kommutatoren in x und y gebildet werden können.

3. Zu Hausdorffs Beweis

HAUSDORFF [10] leitet sein Resultat über die Gestalt und Qualität der Funktion z in der Gleichung $e^x \cdot e^y = e^z$ durch z.T. virtuose Rechnungen in der Algebra der formalen Potenzreihen in den nicht kommutierenden Variablen x und y her. Im Endeffekt wird eine partielle Differentialgleichung der Gestalt

$$x \frac{\partial}{\partial x} z = \omega(x, y) \frac{\partial}{\partial y} z$$

für die Funktion z hergeleitet. Aus dieser läßt sich z zwar nicht explizit berechnen, aber die Form der Funktion ω erlaubt nach einem geeigneten Reihenansatz für z die rekursive Berechnung der Glieder der Reihe.
Ein Differentialoperator der Form $u\frac{\partial}{\partial x}$ liefert dabei bei Anwendung auf eine formale Potenzreihe $F(x)$, die x enthält, das Ergebnis der Differentiation

$$\left. \frac{d}{dt} F(x + tu) \right|_{t=0}$$

Als grundlegende Beziehungen werden von HAUSDORFF als erstes zwei Beziehungen zur Differentiation der Exponentialfunktion abgeleitet, die der Gleichung (7) entsprechen:

$$u \frac{\partial}{\partial x} e^x = e^x \phi(x, u) \tag{8}$$

$$u\frac{\partial}{\partial x}e^x = \psi(x,u)e^x \tag{9}$$

Die Funktionen ϕ und ψ werden konkret durch Reihen, deren Terme Kommutatoren sind, angegeben. In der Schreibweise von 2. haben sie die Gestalt

$$\phi(x,u) = f(ad\,x)(u), \quad \psi(x,u) = h(ad\,x)(u) \tag{10}$$

mit $f(z) = \frac{1-e^{-z}}{z}$, $h(z) = e^z \cdot f(z)$. Die Analogie beim Rechnen mit Reihen in $ad\,x$ (wenn diese Abbildung auch noch nicht so benannt und verwendet wird) zum Rechnen mit Potenzreihen analytischer Funktionen ist hier von HAUSDORFF bereits vermerkt worden.
Als nächstes werden in der Gleichung $e^x e^y = e^z$ die Variablen x und y durch $x + \alpha u$ bzw. $y - \alpha v + \alpha^2(\cdots)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ so abgeändert, daß sich z nicht ändert.
Differentiation nach α zeigt dann, daß

$$u\frac{\partial}{\partial x}z = v\frac{\partial}{\partial y}z$$

gelten muß , oder äquivalent dazu

$$\phi(x,u) = \psi(y,v).$$

Wählt man nun $u = x$, so ergibt sich zunächst $\phi(x,x) = x$ und durch Auflösen von $x = \psi(y,v)$ (mittels Gleichung (3))

$$v = \omega(x,y) = \frac{1}{h}(ad\,y)(x)$$

Setzt man jetzt z als nach den x-Graden der Terme geordnete Reihe an,

$$z = z_0 + z_1 + z_2 + \cdots,$$

so folgt sofort aus der Differentialgleichung

$$x\frac{\partial}{\partial x}z = \frac{1}{h}(ad\,y)(x)\frac{\partial}{\partial y}z$$

durch Gradbetrachtung in x für die Terme von z

$$\begin{aligned}
z_1 &= v\frac{\partial}{\partial y}z_0, \\
2z_2 &= v\frac{\partial}{\partial y}z_1, \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
kz_k &= v\frac{\partial}{\partial y}z_{k-1}.
\end{aligned}$$

Mit $z_0 = y$ und der Tatsache, daß sich v durch Kommutatoren ausdrücken läßt (man beachte auch die anfangs beschriebene Wirkung von Operatoren der Form $u\frac{\partial}{\partial x}$ bzw. analog dazu hier $v\frac{\partial}{\partial y}$), ergibt sich nun rekursiv, daß sich alle z_k durch Kommutatoren berechnen lassen. Damit ist das wesentliche Ergebnis von HAUSDORFF abgeleitet. Im einzelnen folgt

$$CH(x,y) = y + \omega(x,y) + \frac{1}{2!}\omega_1(x,y) + \frac{1}{3!}\omega_2(x,y) + \cdots$$

mit $\omega_0(x,y) = y$, $\omega_k = \omega\frac{\partial}{\partial y}\omega_{k-1}$.

4. Weiterführende Betrachtungen

Für Anwendungen auf konkrete Gruppen und Algebren ist die Frage nach der Konvergenz der CH-Reihe von grundlegendem Interesse. Dies ist auch von HAUSDORFF erkannt worden, der untersucht hat, wie sich die Multiplikation in einer r-dimensionalen Liegruppe mit Hilfe analytischer Funktionen in den kanonischen Koordinaten und bestimmter Matrizengleichungen beschreiben läßt. Die lokale Konvergenz der CH-Reihe im Falle einer normierten Liealgebra L, die sich aus einer Banach-Liealgebra A mit $[x,y] = x\cdot y - y\cdot x$ ergibt, kann man sehr schnell zeigen: Da sich die CH-Reihe durch Umordnen und Zusammenfassen aus der Reihe für $\log(1-(1-e^x\cdot e^y))$ ergibt, sieht man unmittelbar, daß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|1-e^{\|x\|+\|y\|}|^n}{n}$$

eine Majorante für die CH-Reihe darstellt. Daher muß diese für $\|x\|+\|y\| < \log(2)$ konvergieren. Nach dem Satz von ADO (Darstellbarkeit endlichdimensionaler Liealgebren als Matrizenalgebren) hat man damit auch für alle endlichdimensionalen Liealgebren die lokale Konvergenz der CH-Reihe bewiesen.
Die obige Schlußweise ist nun keineswegs auf den Fall normierter Liealgebren beschränkt: 1981 wurde von BOSECK, RUDOLPH und dem Verfasser [2] gezeigt, wie sich eine analoge Konstruktion und Argumentation für eine ganze Klasse lokal m-konvexer Algebren verallgemeinern läßt. Es handelt sich dabei um sogenannte AE-Algebren (Algebren mit Abschätzungsregeln für lange Produkte). Zu ihnen zählen z.B. die bekannten Algebren von Testfunktionen sowie Verallgemeinerungen davon: Algebren von Testfunktionen mit Werten in einer Lialgebra, die entsprechenden Liegruppen sind dann spezielle unendlichdimensionale Liegruppen, die über einem lokal konvexen Raum modelliert sind, man bezeichnet sie als Current-Gruppen.

Eine lokal konvexe Algebra A heißt AE-*Algebra*, wenn es ein nach unten gerichtetes System Q stetiger Halbnormen in A gibt, so daß gilt:

(1) $q_0(x) \stackrel{def}{=} \inf\{q(x) : q \in Q\}$ ist eine stetige Halbnorm in A.

(2) Zu jeder Halbnorm p in A existiert eine Halbnorm $q \epsilon Q$, so daß für hinreichend lange Produkte, d.h. für große m, die folgende Abschätzung gilt:

$$p(x_1 x_2 \cdots x_m) \le q(x_1) q(x_2) \cdots q(x_m).$$

Wesentlich für die Übertragung von Schlußweisen aus dem Fall normierter Liealgebren ist dabei die Tatsache, daß ein entsprechender Potenzreihenkalkül auch für AE-Algebren existiert. Vom Verfasser wurde 1983 gezeigt [5], daß diese Algebrenklasse in gewissem Sinne die allgemeinste darstellt, in der ein sinnvoller Potenzreihenkalkül möglich ist.
Bemerkenswert ist schließlich noch, daß auch die Algebren von formalen Potenzreihen (auch mit nichtkommutierenden Variablen), AE-Algebren sind. Damit ist ein einheitlicher Rahmen von lokal konvexen Liealgebren abgesteckt, in dem sich mit Hilfe der CH-Formel eine lokale Liegruppen-Struktur erzeugen läßt. Es ergibt sich hierbei der gewünschte starke Zusammenhang zwischen Gruppe und Algebra, denn die Exponentialabbildung ist lokal ein Diffeomorphismus, die vorher zitierte Definition von K. H. HOFMANN bleibt damit tragfähig. Schließlich können die eigentlich rein algebraischen Rechnungen und Schlußweisen von HAUSDORFF als analytischer Beweis in einer speziellen lokal konvexen Algebra nachvollzogen werden.
Auf Untersuchungen zum tatsächlichen Konvergenzbereich der CH-Reihe bzw. zur Fortsetzbarkeit der entsprechenden lokal erklärten Multiplikation soll hier nicht eingegangen werden. Dazu sind spezielle Strukturaussagen über die jeweilige Liealgebra erforderlich [6,9].

Literatur

[1] Baker, H. F., *Alternants and continuous groups*, Proc. London Math. Soc. **3** (1905), 24–47.

[2] Boseck H., Czichowski G., Rudolph, K. P., "Analysis on Topological Groups - General Lie Theory", Teubner-Texte zur Mathematik **37**, Leipzig 1981.

[3] Campbell, J. H., "Introductory treatise on Lie's theory of finite continuous transformation groups," Clarendon Press, Oxford 1903.

[4] Czernusca, M., *Lösung der formalen Potentzreihen* $e^A \cdot e^B = e^X$ *und* $e^{A+Bt} = e^A \cdot e^X$, Monatshefte Math. **78** (1974), 4–14.

[5] Czichowski G., *Power series in locally convex Algebras*, Studia Math. **76** (1983), 87–94.

[6] Dixmier, J., *L'application exponentielle dans les groupes de Lie resolubles*, Bull. Soc. France **85** (1957), 113–121.

[7] Djoković, D. Ž., An elementary proof of the Baker-Campbell-Hausdorff-Dynkin Formula, Math. Z. **143** (1975) 209–211.

[8] Dynkin, E. B., *On the representation of the series* $\log(e^x e^y)$ *for non-commutative* x*,* y *by commutators*, Math. Sbornik **25** (1949), 155–162.

[9] Eggert, A., *Extending the Campbell-Hausdorff multiplication*, Preprint Nr.1407, FB Mathematik, TH Darmstadt (1991), Abstract this volume p. 59.

[10] Hausdorff, F., *Die symbolische Exponentialfunktion in der Gruppentheorie*, Berichte Verh. der Sächs. Ges. d. Wiss. Leipzig, Math. Phys. Kl., **58** (1906), 19–48.

[11] Hofmann, K. H., *Die Formel von Campbell, Hausdorff und Dynkin und die Definition Liescher Gruppen*, in : G. Asser, J. Flachsmeyer und W. Rinow, Eds., "Theory of Sets and Topology", Dt. Verl. d. Wiss. Berlin, (1972), 251–264 [12] —, *Analytic groups without analysis*, Symposia Math. **16** (1975), 357–374..

[13] —, *Théorie directe des groupse de Lie*, I–IV, Séminaire Dubreil (Algèbre), 27e année, 1973/74.

Fachrichtungen
Mathematik/Informatik
Ernst Moritz Arndt Universität
Friedrich Ludwig Jahn-Straße 15a
O-2200 Greifswald, Germany

Received May 25, 1992