Journal of Lie Theory
Volume **5** (1995) 165–172

Un théorème de Paley-Wiener pour les groupes de Lie nilpotents

Gayatri Garimella[*]

Communicated by J. Ludwig

Abstract. In this article a short proof of classical Paley-Wiener theorem for nilpotent Lie groups is presented.

1. Introduction

Le but de ce travail est de généraliser une version du théorème de Paley-Wiener classique aux groupes de Lie nilpotents, ce qui consiste à démontrer la conjecture suivante.

Conjecture – *Soient G un groupe de Lie nilpotent, connexe, et simplement connexe de dual unitaire $\widehat{G}$ et ϕ une fonction bornée, mesurable et à support compact (i.e $\phi \in L_c^\infty(G)$). Supposons qu'il existe un sous-ensemble $E \subset \widehat{G}$ de mesure de Plancherel positive tel que $\widehat{\phi}_\rho = 0$ pour tout $\rho \in E$ où $\widehat{\phi}_\rho$ est la transformée de Fourier de ϕ à valeur opérateur. Alors $\phi = 0$ presque partout sur G.*

Ce résultat a été conjecturé par D Scott et A Sitaram dans ([8]). Dans le cas classique, si $\phi \in L_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, la transformée de Fourier $\widehat{\phi}$, de ϕ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^n$, ce qui permet de conclure que $\widehat{\phi} \equiv 0$ si $\widehat{\phi}$ est nulle sur un ensemble dont la mesure de Plancherel est strictement positive. Mais pour $\phi \in L_c^\infty(G)$, la transformée de Fourier $\widehat{\phi}$ ne se prolonge pas en une fonction holomorphe.

L. Corwin et F. P. Greenleaf [1] puis J. D. Moss [6] ont démontré cette conjecture, mais en imposant des conditions sur le groupe de Lie nilpotent G. Pour les premiers, cette condition est : un seul idéal polarise toutes les formes linéaires paramétrisant les orbites génériques de $\mathfrak{g}^*$. La condition pour le deuxième est : une seule sous-algèbre subordonnée maximale polarise toutes les formes linéaires paramétrisant les orbites génériques de $\mathfrak{g}^*$.

Récemment, R. Park [7] a montré cette conjecture pour tous les groupes de Lie nilpotents d'ordre deux et trois. R. L. Lipsman et J. Rosenberg [5] ont

* Je remercie vivement le Prof.G.Grélaud pour son aide et ses encouragements.

ISSN 0940–2268 / $2.50

démontré la conjecture de Paley-Wiener dans le cas général en utilisant des travaux de N. V. Pedersen sur la structure de $\widehat{G}$.

Dans ce travail, nous démontrons cette conjecture par récurrence sur la dimension de G, ce qui nous évite d'avoir recours à l'étude de la structure de $\widehat{G}$. Pour cela, on traite deux cas dûs à J. Dixmier. Contrairement à Moss, la polarisation n'est plus nécessairement la même pour tout ℓ dans $\mathfrak{g}^*$.

Dans la section **2** on donne quelques généralités; la section **3** est consacrée à la construction d'une base de Malcev qui joue un rôle très important dans les calculs de la section **4**, et dans la section **5** on donne la démonstration du théorème de Paley-Wiener pour les groupes de Lie nilpotents.

Je remercie J. Ludwig pour m'avoir suggeré des simplications dans ma démonstration initiale.

2. Notations et Généralités

Soit G un groupe de Lie nilpotent, connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On note $\mathfrak{g}^*$ l'espace des formes linéaires sur $\mathfrak{g}$. Soient $\mathfrak{B} = \{X_1, \ldots, X_n\}$ une base de Malcev forte de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{B}^* = \{X_1^*, \ldots, X_n^*\}$ une base de Jordan-Hölder de $\mathfrak{g}^*$. D'après le théorème de Chevalley-Rosenlicht (cf.[2] p.82) il existe un ouvert de Zariski G- invariant $U \subset \mathfrak{g}^*$ réunion d'orbites coadjointes génériques par rapport à la base $\mathfrak{B}^*$. Soit $\ell = \sum_{i=1}^n \ell_i X_i^* \in U$ une forme linéaire ayant une orbite $O_\ell = Ad^*G.\ell$ de dimension maximale $2k$. On pose $r = n - 2k = \dim(\mathfrak{g}^\ell)$ où $\mathfrak{g}^\ell$ est le radical de ℓ. Il existe des indices $J = \{j_1, \ldots, j_{2k}\}, (2 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_{2k} \leq n)$ tels que toute orbite générique O_ℓ soit au-dessus du sous-espace W_J de dimension $2k$ engendré par $\mathfrak{B}_J^* = \{X_{j_1}^*, \ldots, X_{j_{2k}}^*\}$. Soit $D = \{d_1, \ldots, d_r\}, (1 = d_1 < \ldots < d_r \leq n)$ le complémentaire de J dans $\{1, \ldots, n\}$. Le sous-espace W_D de dimension r engendré par $\mathfrak{B}_D^* = \{X_{d_1}^*, \ldots, X_{d_r}^*\}$ rencontre U. On a $\mathfrak{g}^* = W_D \oplus W_J$. Posons $W = U \cap W_D$. Si $\ell \in W$, on a $\ell = \sum_{i=1}^r \ell_{d_i} X_{d_i}^*$ et si dm est une mesure de Lebesgue sur W_D, alors $d\mu = |Pf(\ell)|dm$ est une mesure sur W, où $Pf(\ell)$ désigne le pfaffien en ℓ donné par $Pf(\ell)^2 = \det \ell([X_i, X_j])_{i,j \in J}$. Cette mesure sur $W \subset \mathfrak{g}^*$ est une mesure de Plancherel pour $\widehat{G}$, l'espace dual de G. D'après ([4]), cette mesure de Plancherel peut s'écrire:

$$d\mu = Pf(\ell) X_1 \wedge \cdots \wedge X_r$$

3. Construction d'une base de Malcev pour $\ell \in W$

Soit

$$0 = \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{g}_i \ldots \subset \mathfrak{g}_{n-1} \subset \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}$$

une suite d'idéaux de $\mathfrak{g}$, telle que la dimension de $\mathfrak{g}_i$ soit i pour tout $1 \leq i \leq n$. On note $\mathfrak{g}^\ell$ le radical de ℓ dans $\mathfrak{g}$. On a deux cas,

Premier cas – Supposons $\mathfrak{g}^\ell \subset \mathfrak{g}_{n-1}$ pour tout $\ell \in W$, i.e. toutes les orbites en position générale sont saturées par rapport à $\mathfrak{g}_{n-1}$. On peut choisir une base de $\mathfrak{g}$ dont les $n-1$ premiers vecteurs de la base pour $\ell \in W$ dépendent rationnellement de ℓ, $\{X_1(\ell), \ldots, X_r(\ell), \ldots, X_m(\ell), \ldots, X_{n-1}(\ell)\}$, dont les $X_i(\ell)$ sont dans $\mathfrak{g}^{\ell_j}$ pour certains j avec $\ell_j = \ell|_{\mathfrak{g}_j}$, et $\mathfrak{g}^{\ell_j} = \{X \in \mathfrak{g}_j | ad^*X.\ell_j = 0\}$. Comme $\mathfrak{g}^\ell \subset \mathfrak{g}_{n-1}$ le dernier vecteur de la base ne dépend pas de ℓ. Soit

$$\mathfrak{B}_W(\ell) = \{X_1(\ell), \ldots, X_r(\ell), \ldots, X_m(\ell), \ldots, X_{n-1}(\ell), X_n\}$$

une telle base de $\mathfrak{g}$. Remarquons que l'ensemble d'indices J_1 pour G_{n-1} est égal à $J - \{n, j_1\}$ pour un certain j_1 tel que toute orbite générique O_ℓ soit au-dessus du sous-espace W_{J_1} de dimension $2k-2$ engendré par $\mathfrak{B}^*_{J_1} = \{X^*_{j_2}, \ldots, X^*_{j_{2k-1}}\}$. On a $\mathfrak{g}^*_{n-1} = W \oplus \mathbb{R}\, X^*_{j_1} \oplus W_{J_1}$. Donc $W_1 = (U \cap W_D) \times \mathbb{R}\, X^*_{j_1} = W \times \mathbb{R}\, X^*_{j_1}$. Si $\ell_1 \in W_1$, on a

$$\ell_1 = \sum_{i=1}^{r} \ell_{d_i} X^*_{d_i} + \mathbb{R}\, X^*_{j_1}$$

La mesure sur W_1 est

$$\begin{aligned} d\mu_1(\ell_1) &= Pf(\ell_1) X_1 \wedge \cdots \wedge X_r \wedge X_{j_1} \\ &= Pf(\ell_{n-1}) X_1 \wedge \cdots \wedge X_r \wedge X_{j_1} \end{aligned}$$

où $Pf(\ell_{n-1})^2 = \det \ell_{n-1}([X_i, X_j])_{i,j \in J_1}$ avec $\ell_{n-1} = \ell|_{\mathfrak{g}_{n-1}}$. Remarquons que, $\mathfrak{g}^{\ell_{n-1}} = \mathfrak{g}^\ell \oplus \mathbb{R}\, X_{j_1}$, $[X_i, X_j] \in \mathfrak{g}_{n-1}$ pour i, j dans J_1, et $\ell([X_{j_1}, \mathfrak{g}_{n-1}]) = 0$.

Remark 1. Soit $A(\ell) = (\ell[X_i, X_j])_{i,j \in J}$ la matrice anti-symétrique.

$$A(\ell) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots 0 & \cdots \ell([X_n, X_{j_1}]) \\ 0 & & * \\ \vdots & (\, A_{n-1}(\ell)\,) & \vdots \\ \ell([X_{j_1}, X_n]) & * & * \end{pmatrix}$$

où $A_{n-1}(\ell) = \ell([X_i, X_j])_{i,j \in J_1}$

Ainsi on a: $\det A(\ell)^{\frac{1}{2}} = |\ell([X_{j_1}, X_n])| (\det A_{n-1}(\ell)^{\frac{1}{2}})$.

C'est-à-dire $Pf(\ell) = \ell([X_{j_1}, X_n]) Pf(\ell_{n-1})$.

En écrivant, la mesure $d\mu_1$ sur W_1 en termes des coordonnés locales sur $\mathfrak{g}^*_{n-1}$, d'après la remarque on a

$$\begin{aligned} d\mu_1 &= \frac{1}{Pf(\ell_{n-1})} dX^*_1 \cdots dX^*_{j_1} \\ &= \frac{\ell([X_{j_1}, X_n])}{Pf(\ell)} dX^*_1 \cdots dX^*_{j_1} \\ &= \ell([X_{j_1}, X_n]) (\frac{1}{Pf(\ell)} dX^*_1 \cdots dX^*_r) \times dX^*_{j_1} \\ &= \ell([X_{j_1}, X_n]) d\mu \times dX^*_{j_1} \\ &= q(\ell) d\mu d\ell_{j_1} \end{aligned}$$

où $q(\ell) = \ell([X_{j_1}, X_n])$.

Cette mesure sur $W_1 \subset \mathfrak{g}^*$ est une mesure de Plancherel sur $\widehat{G_{n-1}}$, l'espace dual de G_{n-1}.

Deuxième cas: Si $\mathfrak{g}^\ell \not\subset \mathfrak{g}_{n-1}$ pour tout $\ell \in W$, i.e. toutes les orbites en position générale ne sont pas saturées par rapport à $\mathfrak{g}_{n-1}$, on peut choisir une base de $\mathfrak{g}$ de manière que le dernier vecteur X_n de la base dépend aussi rationnellement de ℓ et $X_n(\ell) \in \mathfrak{g}^\ell$. Soit

$$\mathfrak{B}_W(\ell) = \{X_1(\ell), \dots, X_r(\ell), \dots, X_m(\ell), \dots, X_{n-1}(\ell), X_n(\ell)\}$$

une telle base de $\mathfrak{g}$ dont les $X_i(\ell)$ sont dans $\mathfrak{g}^{\ell_j}$ pour certains j avec $\ell_j = \ell|_{\mathfrak{g}_j}$. La mesure de Plancherel de $\widehat{G}$ s'écrit;

$$\begin{aligned} d\mu(\ell) &= (Pf(\ell)X_1 \wedge \cdots \wedge X_{r-1}) \wedge X_n \\ &= (Pf(\ell_1)X_1 \wedge \cdots \wedge X_{r-1}) \wedge X_n \\ &= d\mu_1 \times d\ell_n \end{aligned}$$

4. Transformée de Fourier à valeur opérateur

On va définir la transformée de Fourier à valeur opérateur (cf.[1] p 206-207) qui dépend de ℓ.

Premier cas: Supposons donc que $\mathfrak{g}^\ell \subset \mathfrak{g}_{n-1}$ pour presque tout $\ell \in W$, i.e toutes les orbites en position générale sont saturées par rapport à $\mathfrak{g}_{n-1}$. Pour $\ell \in W$, $\rho_\ell = Ind_{G_{n-1}}^G \rho_{\ell_{n-1}}$ est une représentation induite de G, où $\ell_{n-1} = \ell|_{\mathfrak{g}_{n-1}}$ et $\rho_{\ell_{n-1}}$ est une représentation de G_{n-1}. Comme G/G_{n-1} est un quotient de G, l'application $\psi : \mathrm{C}^\infty(G/G_{n-1}) \to \mathrm{C}^\infty(G, \rho)$ se prolonge en une isométrie $\mathrm{H}_\rho \to L^2(G/G_{n-1}) \cong L^2(\mathbb{R})$ où $\mathrm{C}^\infty(G, \rho)$ est l'ensemble des $f \in \mathrm{C}^\infty(G)$ à support compact modulo G_{n-1} telles que $f(hg) = \rho_{\ell_{n-1}}(h)f(g)$ pour tout $h \in G_{n-1}$, $g \in G$.

Pour tout $\phi \in \mathrm{C}_c^\infty(G)$ et $\rho_\ell \in \widehat{G}$ tel que $\ell \in W$, on définit la transformation de Fourier à valeur opérateur par

$$\widehat{\phi}_{\rho_\ell} = \int_G \phi(g)\rho_\ell(g)dg$$

On pose $\ell^t = Ad^*(\exp(-tX))\ell$. Remarquons que

$$\rho_{\ell^t}(g) = \rho_\ell(\exp(tX).g.\exp(-tX))$$

Choisisons $X \in \mathfrak{g}\backslash\mathfrak{g}_{n-1}$. Pour tout s, t dans $\mathbb{R}$, l'action de $\phi \in \mathrm{C}_c^\infty(G)$ sur $f \in \mathrm{H}_{\rho_\ell}$ entraîne

$$(\widehat{\phi}_{\rho_\ell} f)(\exp(tX)) = \int_G \phi(g)\rho_\ell(g)f(\exp(tX))dg$$

comme la représentation induite agit à droite sur $f \in \mathrm{H}_{\rho_\ell}$, on a

$$(\widehat{\phi}_{\rho_\ell} f)(\exp(tX)) = \int_G \phi(g) f(\exp(tX).g)dg$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{G_{n-1}} \phi(h.\exp(sX)) f(\exp(tX).h.\exp(sX))dhds$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{G_{n-1}} \phi(h.\exp(sX)) f(\exp(tX).h.\exp(-tX).\exp(tX).\exp(sX))dhds$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{G_{n-1}} \phi(h.\exp(sX)) f(\exp(tX).h.\exp(-tX).\exp(t+s)X))dhds$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{G_{n-1}} \phi^s(h)\rho_{\ell_{n-1}}(\exp(tX).h.\exp(-tX)) f(\exp(t+s)X)dhds$$
$$= \int_{\mathbb{R}} (\widehat{\phi}^s_{\rho_{(\ell^t)_{n-1}}}) f(\exp(t+s)X)ds$$

où $\phi^s(h) = \phi(h.\exp(sX))$.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ on pose $f_\alpha(h.\exp(sX)) = e^{i\alpha s} f(h.\exp(sX))$ ainsi on a, $f_\alpha \in \mathrm{H}_{\rho_\ell}$, car f est dans H_{ρ_ℓ}.

Soit $ker\rho_\ell$ le noyau de ρ_ℓ dans $C^*(G)$, la C^*- algèbre du groupe G. Si $\phi \in ker\rho_\ell$ d'après les calculs ci-dessus, pour tout $f \in \mathrm{H}_{\rho_\ell}$ on a

$$0 = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\phi}^s_{\rho_{(\ell^t)_{n-1}}} f_\alpha(\exp(t+s)X)ds$$
$$= \int_{\mathbb{R}} e^{i\alpha s}\widehat{\phi}^s_{\rho_{(\ell^t)_{n-1}}} f(\exp(s+t)X))ds \qquad \forall\alpha$$

qui implique $\widehat{\phi}^s_{\rho_{(\ell^t)_{n-1}}} = 0$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. Réciproquement, pour tout s et t dans $\mathbb{R}$ si $\widehat{\phi}^s_{\rho_{(\ell^t)_{n-1}}} = 0$ on a $\widehat{\phi}_{\rho_\ell} = 0$ qui implique que $\phi \in \ker\rho_\ell$. On a établi l'équivalence

$$\phi \in \ker\rho_\ell \Longleftrightarrow (\widehat{\phi}^s_{\rho_{(\ell^t)_{n-1}}} = 0 \ \forall s, t)$$

Deuxième cas: Supposons que $\mathfrak{g}^\ell \not\subset \mathfrak{g}_{n-1}$ pour tout $\ell \in W$. Pour $\ell \in W$, et $\alpha \in \mathbb{R}$ on pose $\ell_\alpha = \ell + \alpha X^*$. Donc, $\ell_\alpha(X) = \ell(X) + \alpha$ et $\rho_{\ell_\alpha} = \rho_\ell \otimes \chi_\alpha$ avec $\chi_\alpha(h.\exp(sX)) = e^{i\alpha s}$ pour tout $h \in G_{n-1}$.

Si ξ, $\eta \in \mathrm{H}_{\rho_\ell} = \mathrm{H}_{\rho_{\ell_\alpha}}$: et la restriction de ρ_{ℓ_α} à G_{n-1} est irréductible et équivalente à $\rho(\ell|_{\mathfrak{g}_{n-1}})$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. On a

$$< \widehat{\phi}_{\rho_{\ell_\alpha}}\xi, \eta > = \int_G < \rho_{\ell_\alpha}(g)\xi, \eta > \phi(g)dg$$
$$= \int_G < \rho_\ell \otimes \chi_\alpha(g)\xi, \eta > \phi(g)dg$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{G_{n-1}} < \rho_\ell \otimes \chi_\alpha(\exp(sX).h)\xi, \eta > \phi(\exp(sX).h)dhds$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{G_{n-1}} < e^{i\alpha s}\rho_\ell(\exp(sX))\rho_{\ell_{n-1}}(h)\xi, \eta > \phi(\exp(sX).h)dhds$$
$$= \int_{\mathbb{R}} e^{i\alpha s} < \rho_\ell(\exp(sX))\widehat{\phi}^s_{\rho_{\ell_{n-1}}}\xi, \eta > ds$$

où $\phi^s(h) = \phi(\exp(sX).h)$. Donc on a exprimé $\widehat{\phi}_{\rho_{\ell_\alpha}}$ à l'aide de $\widehat{\phi}^s_{\rho_{\ell_{n-1}}}$

5. Théorème de Paley-Wiener

Theorem 1. *Soient G un groupe de Lie nilpotent, connexe et simplement connexe, de dual unitaire $\widehat{G}$ et ϕ une fonction bornée, mesurable et à support compact (i.e. $\phi \in L^\infty_c(G)$). Supposons qu'il existe un sous-ensemble $E \subset \widehat{G}$ de mesure de Plancherel positive tel que $\widehat{\phi}_\rho = 0$ pour tout $\rho \in E$ où $\widehat{\phi}_\rho$ est transformée de Fourier de ϕ à valeur opérateur. Alors $\phi = 0$ presque partout sur G.*

Proof. – On procède par récurrence sur la dimension n de G. Le résultat est vrai si la dimension de G est un, car $G \cong \mathbb{R}$. Supposons que le résultat soit vrai pour les groupes de dimension $n-1$. On peut supposer que E est contenu dans W (car, si $E \cap W$ négligeable alors $E = (E\cap W) \cup (E \cap W^c)$ est négligeable, où W^c est complémentaire de W).

Premier cas : $\mathfrak{g}^\ell \subset \mathfrak{g}_{n-1}$ pour tout $\ell \in W$. Soit $\phi \in C^\infty_c(G)$. Par hypothèse, pour tout ρ_ℓ, tel que $\ell \in E$ on a $0 = \widehat{\phi}_{\rho_\ell}$; montrons alors $\phi = 0$ pour presque tout sur G.

D'après le paragraphe **4** on a

$$\phi \in \ker \rho_\ell \Longleftrightarrow (\widehat{\phi}^s_{\rho_{(\ell^t)_{n-1}}} = 0 \ \forall s, t)$$

Par hypothèse, $\widehat{\phi_{\rho_\ell}} = 0$ pour tout $\ell \in E$ et d'après l'équivalence ci-dessus on a

$$\widehat{\phi}^s_{\rho_{(\ell^t)_{n-1}}} = 0$$

pour tout s, t dans $\mathbb{R}$.

Donc, $\widehat{\phi}^s_{\rho_{(\ell^t)_{n-1}}} = 0$ pour tout ℓ_{n-1} parcourant $E' = E|_{\mathfrak{g}^*_{n-1}}$ sur $\mathfrak{g}^*_{n-1}$ de mesure de Plancherel $d\mu_1 = q(\ell)d\mu \times d\ell_{j_1}$ strictement positive, car $\ell([X_n, X_{j_1}]) \neq 0$. Alors, pour tout s dans $\mathbb{R}$ l'ensemble $M = \{\exp tX.\ell_{n-1} \mid \widehat{\phi}^s_{\rho_{(\ell^t)_{n-1}}} = 0, t \in \mathbb{R}\ , \ell_{n-1} \in E|_{\mathfrak{g}^*_{n-1}}\}$ est non négligeable pour la mesure de Plancherel $d\mu_1$. D'après l'hypothèse de récurrence ϕ^s est nulle presque partout sur G_{n-1}. Ce qui entraîne d'après le théorème de Fubini que ϕ est nulle presque partout sur G.

Deuxième cas : $\mathfrak{g}^\ell \not\subset \mathfrak{g}_{n-1}$ pour tout $\ell \in W$ – Soit $\phi \in C^\infty_c(G)$. Par hypothèse, pour tout ρ_ℓ, tel que $\ell \in E$ on a $\widehat{\phi}_{\rho_\ell} = 0$; montrons alors $\widehat{\phi}_{\rho_\ell} = 0$ pour presque tout $\ell \in W$.

Soit donc $\ell \in E$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ on a

$$< \widehat{\phi}_{\rho_{\ell_\alpha}} \xi, \eta >= \int_{\mathbb{R}} e^{i\alpha s} < \rho_\ell(\exp(sX))\widehat{\phi}^s_{\rho_{\ell_{n-1}}} \xi, \eta > ds$$

donc

$$\widehat{\phi}_{\rho_{\ell_\alpha}} = \int_{\mathbb{R}} e^{i\alpha s} \rho_\ell(\exp(sX))\widehat{\phi}^s_{\rho_{\ell_{n-1}}} ds$$

Posons

$$\Psi(s) = \rho_\ell(\exp(sX))\widehat{\phi}^s_{\rho_{\ell_{n-1}}}$$

Donc

$$\begin{aligned}\widehat{\phi}_{\rho_{\ell_\alpha}} &= \int_{\mathbb{R}} \Psi(s)e^{i\alpha s}ds \\ &= \widehat{\Psi}(\alpha)\end{aligned}$$

Par l'hypothèse, pour tout $\ell \in E$ on a $\widehat{\phi}_{\rho_\ell} = 0$, qui implique $\widehat{\Psi}(\alpha) = 0$, par conséquent on a $\Psi(s) = 0$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. Donc

$$0 = \widehat{\phi}_{\rho_{\ell_\alpha}} = \int_{\mathbb{R}} e^{i\alpha s}\rho_\ell(\exp(sX))\widehat{\phi}^s_{\rho_{\ell_{n-1}}}ds$$

pour tout α dans $\mathbb{R}$ qui implique $\widehat{\phi}_{\rho_{\ell_{n-1}}} = 0$ pour tout ℓ_{n-1} parcourant E_1 (trace de E sur $\mathfrak{g}^*_{n-1}$) de mesure de Plancherel sur $\widehat{G_{n-1}}$ strictement positive. D'après l'hypothèse de récurrence $\widehat{\phi}\rho_{\ell_{n-1}} = 0$ pour presque tout $\ell_{n-1} \in W'$ (trace de W sur $\mathfrak{g}^*_{n-1}$). Donc , $0 = \widehat{\phi}\rho_\ell$ pour presque tout $\ell \in W$ (d'après les calculs de $\widehat{\phi}_{\rho_{\ell_\alpha}}$).

D'où $\widehat{\phi}_\rho = 0$ pour presque tout ρ relativement à la mesure de Plancherel.

D'après la formule de Plancherel (cf.[2] Th.4.3.17) pour un groupe de Lie nilpotent, on a

$$||\phi||_2^2 = \int_{\mathbb{R}} \int_{\widehat{G}_{n-1}} Tr(\widehat{\phi}_\rho\widehat{\phi}^*_\rho)d\mu_1(\rho)d\ell_n = 0$$

qui entraîne que ϕ est nulle.

Si maintenant, on considère $\phi \in L^\infty_c(G)$. Soit $\{f_n\}_n$ une unité approchée dans $C^\infty_c(G)$. Pour tout entier $n, f_n * \phi \in C^\infty_c(G)$. Soit $\rho \in E$, si $\widehat{\phi}_\rho$ est nul alors $(\widehat{f_n * \phi})_\rho$ est nul. Donc, d'après ce qui précède, $f_n * \phi$ est nul (pour tout entier n). Mais la suite $(f_n * \phi)_n$ convergeant vers ϕ dans $L^1(G)$, cela entraîne $\phi = 0$ presque partout sur G. ■

References

[1] Corwin, L., and F. P. Greenleaf, *Fourier transforms of smooth functions on certains nilpotent Lie groups*, J. of Functional Analysis, **37** (1980), 203–217.

[2] —, "Representations of Nilpotent Lie Groups and their Applications, Part I, Basic Theory and Examples," Cambridge Studies in Advanced Mathematics 18, (1990).

[3] Dixmier, J., "Algèbres enveloppantes," Cahiers scientifiques, fascicules 37, Gauthier - Villars, Paris (1974).

[4] Kirillov, A. A., *Plancherel measure for nilpotent Lie groups*, Functional Analysis and Applications **1** (1967), 330–331.

[5] Lipsman, R.L., and J. Rosenberg, *The behavior of Fourier transforms for nilpotent Lie groups*, Prépublication 1994.

[6] Moss, J.D., *A Paley-Wiener theorem for selected nilpotent Lie groups*, J. of Functional Analysis **114** (1993), 395–411.

[7] Park, R., *A Paley-Wiener theorem for all two and three step nilpotent Lie groups*, J. of Functional Analysis **133** (1995), 277–300.

[8] Scott, D., and A. Sitaram, *Some remarks on the Pompeiu problem for groups*, Proc. Amer. Math. Soc. **104** (1988), 1261–1266.

Gayatri Garimella
Département de Mathématiques
Université de Poitiers
40, Avenue du Recteur Pineau
F-86022 Poitiers, France

Received February 27, 1995
and in final form October 4, 1995