Journal of Lie Theory
Volume **18** (2008) 369–374

Une propriété remarquable des traces pour les algèbres de Lie

Nicolas Hornn

Communicated by J. Ludwig

Abstract. L'objet de cette note est de présenter une preuve complète d'un résultat connu de longue date par M. Duflo et énoncé dans [5] théorème 8. Un résultat analogue se trouve dans [1], mais la démonstration semble être incomplète. Notre preuve se fonde sur l'utilisation de deux lemmes, que l'on trouve dans [4], sur l'écriture des parties radiales des opérateurs différentiels invariants sur le dual d'une algèbre de Lie. On démontre dans cette note que certains opérateurs différentiels invariants associés à des traces ont un comportement trivial sur les fonctions invariantes. On démontre d'abord le résultat dans le cas des algèbres de Lie algébriques puis on l'étend au cas général.

Abstract. In this short article, we prove that on the dual of a Lie algebra some invariant differential operators have a zero action on invariant functions.
Mathematics Subject Index 2000: 17B45 (Primary), 13A50 (Secondary)
Keywords and phrases: algebraic Lie algebras, invariant polynomial functions, invariant differential operators.

1. Introduction

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie algébrique au sens de Chevalley de dimension finie sur le corps des nombres complexes. Soit G un groupe algébrique (au sens de Chevalley) linéaire connexe tel que $\mathrm{Lie}(G) = \mathfrak{g}$. Soient $\mathfrak{g}^*$ l'espace vectoriel dual de $\mathfrak{g}$, $S(\mathfrak{g})$ (resp. $S(\mathfrak{g}^*)$) l'algèbre symétrique de $\mathfrak{g}$ (resp. de $\mathfrak{g}^*$). On identifie $S(\mathfrak{g})$ (resp. $S(\mathfrak{g}^*)$) à l'algèbre des fonctions polynomiales à coefficients complexes sur $\mathfrak{g}^*$ (resp. sur $\mathfrak{g}$). On notera $S(\mathfrak{g})^G$ (resp. $S(\mathfrak{g}^*)^G$) l'algèbre des fonctions polynomiales G-invariantes sur $\mathfrak{g}^*$ (resp. sur $\mathfrak{g}$). On notera $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ (resp. $S(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$) les éléments $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$-invariants de $S(\mathfrak{g})$ (resp. $S(\mathfrak{g}^*)$). Comme G est connexe on a $S(\mathfrak{g})^G = S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$. On remarque que l'on a aussi $S(\mathfrak{g}^*)^G = S(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$. Ce sont les fonctions polynomiales G-invariantes sur $\mathfrak{g}$. Pour un entier n, on note $p_{n,\mathfrak{g}}$ la fonction polynomiale invariante, définie pour $X \in \mathfrak{g}$ par

$$p_{n,\mathfrak{g}}(X) = \mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}[(\mathrm{ad}X)^{2n+1}].$$

On a $p_{n,\mathfrak{g}} \in S(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$. On note alors $\partial(p_{n,\mathfrak{g}})$ l'opérateur différentiel invariant à coefficients constants sur $\mathfrak{g}^*$ associé à $p_{n,\mathfrak{g}}$. Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{r} \oplus \mathfrak{g}_u$ une décomposition de Levi

ISSN 0949–5932 / \$2.50

algébrique comme dans [6] où $\mathfrak{r}$ est une composante réductive de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}_u$ est le radical unipotent.

Le résultat principal de cette note est le théorème suivant :

Theorem 1.1. *On suppose que $\mathfrak{g}$ est algébrique. Pour tout $P \in S(\mathfrak{g})^G$ on a*

$$\partial(p_{n,\mathfrak{g}})P = 0.$$

C'est -à-dire l'opérateur $\partial(p_{n,\mathfrak{g}})$ agit trivialement sur $S(\mathfrak{g})^G$.

On étend les notations introduites $S(\mathfrak{g})$, $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$, $p_{n,\mathfrak{g}}$, etc ... au cas des algèbres de Lie de dimension finie quelconques, *id est* non nécessairement algébriques.

Corollary 1.2. *On garde les notations précédentes. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur $\mathbb{C}$. Pour tout $P \in S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ on a*

$$\partial(p_{n,\mathfrak{g}})P = 0.$$

Corollary 1.3. *On garde les notations précédentes. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique 0. Pour tout $P \in S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ on a*

$$\partial(p_{n,\mathfrak{g}})P = 0.$$

Preuve du corollaire 1.2*:* En effet ce corollaire résulte du corollaire 1 et du principe de Lefschetz par extension des scalaires (en considérant les constantes de structure $c_{i,j}^k$ de $\mathfrak{g}$: $[X_i, X_j] = c_{i,j}^k X_k$ et en plongeant le corps $\mathbb{Q}(c_{i,j}^k)$ dans $\mathbb{C}$). ∎

Preuve du Corollaire 1.1*:* On rappelle que toute algèbre de Lie de dimension finie admet une représentation fidèle de dimension finie. On fixe une telle représentation V, ce qui permet de considérer $\mathfrak{g}$ comme une sous-algèbre de l'algèbre algébrique $\mathfrak{gl}(V)$. On note $\overline{\mathfrak{g}} = \bigcap_{\mathfrak{h}} \mathfrak{h}$ où $\mathfrak{h}$ décrit l'ensemble des sous-algèbres algébriques de $\mathfrak{gl}(V)$ contenant $\mathfrak{g}$. C'est l'enveloppe algébrique de $\mathfrak{g}$ [6]. On rappelle aussi que $\mathfrak{g}$ est un idéal de $\overline{\mathfrak{g}}$, on a donc $[\mathfrak{g}, \overline{\mathfrak{g}}] \subset \mathfrak{g}$ et $(\mathrm{ad}X)^{2n+1}$ est un endomorphisme de $\mathfrak{g}$ même si $X \in \overline{\mathfrak{g}}$. La formule $\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{ad}X)^{2n+1}$ pour $X \in \mathfrak{g}$ se prolonge alors pour $X \in \overline{\mathfrak{g}}$. Comme l'algèbre $\overline{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ est abélienne on a pour tout $X \in \overline{\mathfrak{g}}$

$$\mathrm{tr}_{\overline{\mathfrak{g}}}(\mathrm{ad}X)^{2n+1} = \mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{ad}X)^{2n+1}.$$

On a l'égalité suivante :

$$(p_{n,\overline{\mathfrak{g}}})_{|\mathfrak{g}} = p_{n,\mathfrak{g}}.$$

On a par ailleurs pour $P \in S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \subset S(\mathfrak{g})^{\overline{\mathfrak{g}}} \subset S(\overline{\mathfrak{g}})^{\overline{\mathfrak{g}}}$

$$\partial(p_{n,\overline{\mathfrak{g}}})P = \partial(p_{n,\mathfrak{g}})P.$$

En appliquant le théorème 1 à $\overline{\mathfrak{g}}$, on obtient donc $\partial(p_{n,\mathfrak{g}})P = 0$. ∎

Remerciements : Je remercie Ch. Torossian pour avoir suggéré et dirigé ce travail.

2. Rappels sur les fonctions G-invariante sur $\mathfrak{g}^*$

On suppose maintenant que $\mathfrak{g}$ est algébrique sur $\mathbb{C}$, de dimension finie. En particulier $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre d'un $\mathfrak{gl}(V)$.
Pour $f \in \mathfrak{g}^*$ on note

$$\mathfrak{g}^f = \Big\{ X \in \mathfrak{g}, \forall Y \in \mathfrak{g}, f([X,Y]) = 0 \Big\}.$$

On dira que f est régulière si la dimension de $\mathfrak{g}^f$ est minimale parmi les $\{\dim(\mathfrak{g}^g)$, $g \in \mathfrak{g}^*\}$. On montre que $\mathfrak{g}^f$ est abélienne pour f régulière ([2] chapitre 1 §11). On note $\mathfrak{g}^*_{reg}$ l'ensemble des formes régulières sur $\mathfrak{g}$. On rappelle que c'est un ouvert de Zariski non vide.
Soit $\mathfrak{g}^f = \mathfrak{i}_f \oplus \mathfrak{g}^f_u$ une décomposition de Levi version algébrique. Comme $\mathfrak{g}^f$ est abélienne, $\mathfrak{i}_f$ est une sous-algèbre abélienne formée d'éléments semi-simples et $\mathfrak{g}^f_u$ est une sous-algèbre abélienne formée d'éléments nilpotents. Une forme linéaire f est dite très régulière si elle est régulière et si la dimension de $\mathfrak{i}_f$ est maximale parmi les $\{\dim(\mathfrak{i}_g),\ g \in \mathfrak{g}^*_{reg}\}$.
On dira qu'un tore algébrique $\mathfrak{i}$ est une sous-algèbre de Cartan-Duflo de $\mathfrak{g}$ s'il existe une forme très régulière f sur $\mathfrak{g}$ telle que $\mathfrak{i} = \mathfrak{i}_f$.
Fixons maintenant f une forme très régulière. On notera pour la suite $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^{\mathfrak{i}_f}$ le centralisateur de $\mathfrak{i}_f$. De plus on a la décomposition suivante:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{q}$$

où $\mathfrak{q} = [\mathfrak{i}_f, \mathfrak{g}]$ est la somme des sous-espaces propres associés aux valeurs propres non nulles de $\mathrm{ad}X$, pour $X \in \mathfrak{i}_f$. On peut donc identifier $\mathfrak{h}^*$ à un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}^*$ grâce à cette décomposition.

Lemme 2.1. *Toute orbite très régulière de $\mathfrak{g}^*$ rencontre $\mathfrak{h}^*$.*

Preuve du lemme 2.1*:* Considérons l'application

$$A : G \times \mathfrak{h}^* \longrightarrow \mathfrak{g}^*, \qquad (x,\xi) \longmapsto x.\xi = Ad^*x.\xi$$

et calculons sa différentielle en $(1,\eta)$ pour $\eta = f_{|\mathfrak{h}}$. On trouve alors:

$$dA(1,\eta) : \mathfrak{g} \times \mathfrak{h}^* \longrightarrow \mathfrak{g}^*, \quad (x,\xi) \longmapsto \xi + \mathrm{ad}^*x.\eta.$$

Montrons que cette dernière application est surjective. Pour cela montrons que l'orthogonal de son image est réduit à $\{0\}$. On utilise la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{q}$ et on identifie $\mathfrak{h}^*$ à $\mathfrak{q}^\perp$. Soit $y \in (\mathrm{Im}\, dA(1,\eta))^\perp$ alors $y \in \mathfrak{h}^{*\perp}$ donc y s'identifie à un élément de $\mathfrak{q}$ et $\forall x \in \mathfrak{g}, f([x,y]) = 0$. Or la forme bilinéaire suivante:

$$B_f : \mathfrak{q} \times \mathfrak{q} \longmapsto \mathbb{C}, \qquad (u,v) \to f([u,v])$$

est non dégénérée donc $y = 0$. La première application est par conséquent une submersion locale en $(1,\eta)$. On applique le théorème de l'application ouverte. On en déduit que $G.\mathfrak{h}^*$ contient un ouvert de Zariski. Comme $G.\mathfrak{h}^*$ est G-invariant, $G.\mathfrak{h}^*$ contient un ouvert de Zariski G-invariant. L'intersection de cet ouvert avec les formes très régulières est donc non vide car deux ouverts de Zariski ont toujours une intersection non vide.

Soit f_1 une forme très régulière. On note $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{g}^{\mathfrak{i}_{f_1}}$ le centralisateur de la partie semi-simple $\mathfrak{i}_{f_1}$ de $\mathfrak{g}^{f_1}$. Montrons que $G \cdot f_1$ intersecte $\mathfrak{h}^*$. Il suffit de montrer que $\mathfrak{h}_1^*$ et $\mathfrak{h}^*$ sont conjugués. Les ensembles $G.\mathfrak{h}_1^*$ et $G.\mathfrak{h}^*$ s'intersectent sur les éléments très réguliers car ils contiennent des ouverts de Zariski. En effet il existe ξ une forme très régulière dans l'intersection $G.\mathfrak{h}_1^* \cap G.\mathfrak{h}^*$. Ecrivons $\xi = Ad^*(g_1) \cdot \eta_1 = Ad^*(g) \cdot \eta$, avec $\eta \in \mathfrak{h}^*$ (resp. $\eta_1 \in \mathfrak{h}_1^*$). On a alors $Ad^*(g_1^{-1}g) \cdot \eta = \eta_1$. On en déduit que l'on a $Ad(g_1^{-1}g) \cdot \mathfrak{g}^{\eta} = \mathfrak{g}^{\eta_1}$. Par conséquent les tores $\mathfrak{i}_{\eta} = \mathfrak{i}_f$ et $\mathfrak{i}_{\eta_1} = \mathfrak{i}_{f_1}$ sont conjugués. On conclut alors que $Ad^*(g_1^{-1}g)\mathfrak{h}^* = \mathfrak{h}_1^*$. ■

On peut maintenant en déduire que toute fonction polynomiale G-invariante est nulle si et seulement si sa restriction à $\mathfrak{h}^*$ l'est.

Corollaire 2.2. *Si F est une fonction G-invariante sur $\mathfrak{g}^*$ telle que $F_{|\mathfrak{h}^*} \equiv 0$ alors $F \equiv 0$.*

3. Parties radiales dans $\mathfrak{g}^*$

Montrons maintenant notre théorème principal. Il suffit de montrer que pour tout $P \in S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ (G est connexe) on a :

$$[\partial(p_{n,\mathfrak{g}})P]_{|\mathfrak{h}^*} = 0.$$

Utilisons maintenant deux lemmes énoncés dans [4] que nous adaptons à notre situation. Le premier donne une formule pour le calcul de la partie radiale (voir par exemple [3]) des opérateurs différentiels $\mathfrak{g}$-invariants sur $\mathfrak{g}^*$. Le second montre que pour certains opérateurs seule la connaissance de leur restriction à la sous-algèbre de Cartan-Duflo $\mathfrak{i}_f$ va intervenir.
On a la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{q}$. La dimension de $\mathfrak{q}$ est paire, disons $2d$. En effet la forme $B_{f|\mathfrak{q}\times\mathfrak{q}}$ est non dégénérée et antisymétrique. On fixe Ω une $2d$ forme alternée sur $\mathfrak{q}$. Pour tout $g \in \mathfrak{h}^*$ on définit $\pi(g)$, le Pfaffien par

$$\bigwedge^{d} B_g|_{\mathfrak{q}\times\mathfrak{q}} = \pi(g)\Omega.$$

Alors $g \longmapsto \pi(g)$ est une fonction polynomiale homogène de degré d, non nulle. On la note π.

Lemme 3.1. (voir [4] §3.3) *Soient $p \in S(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$ et $p_{|\mathfrak{h}}$ la restriction de p à $\mathfrak{h}$. C'est un élément de $S(\mathfrak{h}^*)$. Pour toute fonction polynomiale G-invariante P sur $\mathfrak{g}^*$ on a l'égalité polynomiale suivante:*

$$\pi \cdot (\partial(p)P)_{|\mathfrak{h}^*} = \partial(p_{|\mathfrak{h}})(\pi \cdot P_{|\mathfrak{h}^*}).$$

Lemme 3.2. (voir [4] §3.7) *Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{r} \oplus \mathfrak{g}_u$ une décomposition de Levi algébrique. La forme $(X,Y) \longmapsto \mathrm{tr}(XY)$ est invariante et non dégénérée sur le tore $\mathfrak{i}_f$. On peut écrire $\mathfrak{h} = \mathfrak{i}_f \overset{\perp}{\oplus} \mathfrak{h}_1$, avec $\mathfrak{h}_1$, l'orthogonal de $\mathfrak{i}_f$ dans $\mathfrak{h}$. Cela permet d'identifier $\mathfrak{i}_f^*$ à un sous-espace de $\mathfrak{h}^*$. Si $p \in S(\mathfrak{r}^*)^{\mathfrak{r}} \subset S(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$ alors pour toute fonction polynomiale G-invariante P sur $\mathfrak{g}^*$ on a:*

$$\partial(p_{|\mathfrak{h}})(\pi \cdot P_{|\mathfrak{h}^*}) = \partial(p_{|\mathfrak{i}})(\pi \cdot P)_{|\mathfrak{h}^*}.$$

En d'autres termes seule intervient, dans la partie différentielle, la restriction de p à $\mathfrak{i}_f$.
On applique les deux lemmes à $p = p_{n,\mathfrak{g}}$. Vérifions que $p_{n,\mathfrak{g}} \in S(\mathfrak{r}^*)^{\mathfrak{r}}$. Autrement dit on doit montrer que pour tout $R \in \mathfrak{r}$ et tout $U \in \mathfrak{g}_u$ on a :

$$p_{n,\mathfrak{g}}(R+U) = p_{n,\mathfrak{g}}(R).$$

On considère la suite centrale descendante associée au radical unipotent $\mathfrak{g}_u$:

$$\mathfrak{C}^1(\mathfrak{g}_u) = \mathfrak{g}_u,$$

et pour $k \geq 2$:

$$\mathfrak{C}^k(\mathfrak{g}_u) = [\mathfrak{C}^{k-1}(\mathfrak{g}_u), \mathfrak{g}_u].$$

Il existe un entier k_0 tel que $\mathfrak{C}^{k_0+1}(\mathfrak{g}_u) = \{0\}$. La suite $\mathfrak{C}^k(\mathfrak{g}_u)$ pour $1 \leq k \leq k_0$ est strictement décroissante et pour $\mathrm{X} \in \mathfrak{r}$ l'endomorphisme ad$X$ applique $\mathfrak{C}^k(\mathfrak{g}_u)$ dans $\mathfrak{C}^k(\mathfrak{g}_u)$. Soit une base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\mathrm{u}} \cup B_{\mathfrak{r}}$ de $\mathfrak{g}$ adaptée à la décomposition de Levi $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_u \oplus \mathfrak{r}$ telle que $\mathcal{B}_{\mathrm{u}}$ soit une base adaptée au drapeau $\{0\} \subset \mathfrak{C}^{k_0}(\mathfrak{g}_u) \subset \ldots \subset \mathfrak{g}_u$. Dans la base adaptée $\mathcal{B}$ ainsi construite pour tout $U \in \mathfrak{g}_u$ la matrice de ad$U$ a la forme suivante:

$$\mathrm{ad}U = \begin{pmatrix} 0 & U_{1,2} & 0 & \cdots & 0 & U_{1,p} \\ 0 & 0 & U_{2,3} & \ddots & \vdots & U_{2,p} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & U_{p-2,p-1} & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & \ddots & U_{p-1,p} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour tout élément $R \in \mathfrak{r}$ la matrice de ad$R$ dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale par blocs:

$$\mathrm{ad}R = \begin{pmatrix} R_{1,1} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & R_{2,2} & \ddots & 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & R_{p-1,p-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & R_{p,p} \end{pmatrix}$$

On a ainsi

$$(\mathrm{ad}R + \mathrm{ad}U)^{2n+1} = (\mathrm{ad}R)^{2n+1} + \sum_{i_j} \mathrm{ad}V_{i_1} \cdots \mathrm{ad}V_{i_{2n+1}}$$

avec $V_i = U$ ou R et dans chaque produit ad$V_{i_1} \cdots$ad$V_{i_{2n+1}}$ apparaît au moins une fois U. Clairement ad$V_{i_1} \cdots$ad$V_{i_{2n+1}}$ est une matrice triangulaire stricte par blocs. On a donc pour tout $U \in \mathfrak{g}_u$

$$\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{ad}R + \mathrm{ad}U)^{2n+1} = \mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{ad}R)^{2n+1}.$$

On en conclut que $p_{n,\mathfrak{g}} \in S(\mathfrak{r}^*)^{\mathfrak{r}}$.

Terminons la preuve du théorème. Pour $X \in \mathfrak{g}^f$ on a

$$p_{n,\mathfrak{g}}(X) = \mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{ad}X)^{2n+1} = \mathrm{tr}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^f}(\mathrm{ad}X)^{2n+1},$$

car $\mathfrak{g}^f$ est abélienne. Par ailleurs ad$X$ est un endomorphisme symplectique sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^f$ muni de sa forme antisymétrique et non dégénérée B_f. Par conséquent $(\mathrm{ad}X)^{2n+1}$ est aussi symplectique et donc de trace nulle. On a donc $(p_{n,\mathfrak{g}})_{|\mathfrak{g}^f} \equiv 0$, et a fortiori $(p_{n,\mathfrak{g}})_{|\mathfrak{i}_f} \equiv 0$. Le lemme 2 nous assure alors que $\partial(p_{n,\mathfrak{g}|\mathfrak{h}})(\pi P_{|\mathfrak{h}^*})$ est nul donc par le lemme 1 on a:

$$\pi \cdot (\partial(p_{n,\mathfrak{g}})P)_{|\mathfrak{h}^*} = 0.$$

Comme π est non nul on en déduit que $(\partial(p_{n,\mathfrak{g}})P)_{|\mathfrak{h}^*} = 0$ puis d'après le corollaire 2, on conclut que $\partial(p_{n,\mathfrak{g}})P = 0$ sur $\mathfrak{g}^*$. ■

Références

[1] Arnal, D., and Ben Amar, N., *Kontsevich's Wheels and Invariant Polynomial Functions on the Dual of Lie Algebras*, Letters in Mathematical Physics **52-4** (2000), 291–30.

[2] Dixmier, J., "Algèbres Enveloppantes", Gauthier-Villars, 1974.

[3] Helgason, S., "Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces", Academic Press, 1978.

[4] Khalgui, M. S., and Torasso, P., *La formule de Poisson-Plancherel pour un groupe presque algébrique réel II*, Journal of Functional Analysis **144:1** (1997), 153–189.

[5] Kontsevich, M., *Operads and Motives in Deformation Quantization, Letters in mathematical physics*, **48** (1999), 35–72.

[6] Onischik, A., and Vinberg, E., Lie Groups and Algebraic Groups, Springer, 1990.

Nicolas Hornn
19, rue du Clos,
95470 Fosses,
France,
nico4430@yahoo.fr

Received November 12. 2005
and in final form April 24, 2006